Université Sidi Mohammed Ben abdellah
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Année universitaire 2019-2020
Filière CP2 Analyse 4
H. Benbouziane

Série de T.D. N1
Séries de Fourier

Exercice 0.1 *Montrer que la série trigonométrique de terme général* $U_n(x) = \frac{\sin(2\pi n x)}{n^3+n+1}$ *est convergente.*

Exercice 0.2 *Soit* $r \in]0;1[$.

1. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} r^n e^{inx}$.
2. *En déduire que :* $\sum_{n=0}^{n=+\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$

et que $\sum_{n=0}^{n=+\infty} r^n \sin(nx) = \frac{r\sin(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$

Exercice 0.3 *Soit* f *la fonction de période* 2π *définie sur* $[0;2\pi]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & si\ 0 < x < 2\pi \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est impaire, puis déterminer la série de fourier associée à* f.
2. *Est ce que que* f *est développable en série de Fourier.*
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 0.4 *Soit* f *la fonction paire de période* 2π *définie par* $f(x) = x$ *sur* $[0;\pi]$.

1. *Démontrer que la série de Fourier de* f *converge vers* f.
2. *Calculer les coefficients de Fourier de* f.
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2}$ *ainsi que celle de la série* $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 0.5 *Soit* g *la fonction impaire de période* 2π *définie par* $g(x) = x$ *sur* $[0;\pi[$ *et* $g(\pi) = 0$.

1. *Etudier la convergence de la série de Fourier de* g.
2. *Calculer les coefficients de Fourier de* g.
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 0.6 *Soit* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, *on consulère la fonction* f *périodique de période* 2π *définie par* $f(x) = \cos(zx)$ *sur* $[-\pi,\pi]$.

1. *Calculer les coefficients de Fourier* f.
2. *Montrer que* $\cos(zx) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sin(\pi z)\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}\cos(nx)$

Scanned with CamScanner

3. *En déduire que* $\frac{1}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$.

4. *Déterminer la somme* $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$.

Exercice 0.7 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue dont les coefficients de Fourier sont nuls.*

1. *Montrer que la fonction f est nulle.*
2. *En déduire que deux fonctions f et g continues 2π ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales.*

Exercice 0.8 *Soit f la fonction paire de période 2π définie sur $]-\pi;\pi]$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \ -\pi < x \leq 0 \\ e^{x} & si \ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1. *Étudier la convergence de la série de Fourier de f (tracer le graphe de f).*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*

Exercice 0.9 *Soit g la fonction impaire de période 2π définie par $g(x) = x^2$ sur $[0;\pi[$ et $g(\pi) = 0$.*

1. *Etudier la convergence de la série de Fourier de g.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de g.*
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 0.10 *Soit g la fonction de période 2π définie par $g(x) = x^2$ sur $]\pi,\pi[$.*

1. *Etudier la convergence de la série de Fourier de g. Tracer la courbe de f .*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de g.*
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *et de* $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^4}$

Exercice 0.11 *Soit f la fonction de période 2π définie par $f(x) = e^x \sin(x)$ sur $[-\pi;\pi[$.*

1. *Etudier la convergence de la série de Fourier associée à f.*
2. *Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I_p = \int_{-\pi}^{+\pi} e^x e^{ipx} dx$.*
3. *En déduire les coefficients de Fourier de f.*
4. *Calculer la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 - n^2}{n^4 + 4}$.

Exercice 0.12 *Soit f la fonction impaire de période 2π définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0;\pi]$.*

1. *Déterminer la série de fourier associée à f.*
2. *Montrer que f est développable en série de Fourier.*
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Scanned with CamScanner

Analyse
Série TD n°: 1

• Exemple (Cours)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π Tq :

$f(x) = x(2\pi - x)$ sur $[0, 2\pi]$

1/ Montrons que f est paire

. il Suffit de Mq $f/_{[-\pi,\pi]}$ est paire.

Soit $x \in [0,\pi] \Rightarrow f(x) = x(2\pi - x)$

et $-x \in [-\pi, 0] \Rightarrow -x \in [0,\pi]$

$\Rightarrow f(-x) = -x(2\pi + x)$

et $x + 2\pi \in [\pi, 2\pi] \subset [0, 2\pi]$

donc $f(x) = f(x + 2\pi)$

$= (x + 2\pi)(2\pi - x - 2\pi)$

$= -x(2\pi + x)$

$= f(-x)$.

Conclusion : $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow f/_{[-\pi,\pi]}$ est paire

d'ou f est paire.

Exercice 1 :

$$U_n(t) = \frac{\sin(2\pi n t)}{n^2 + n + 1}$$

on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left| \frac{\sin(2\pi n t)}{n^2 + n + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

et on sait que la série numérique $\sum \frac{1}{n^2 + n + 1}$ CV car $\left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \sim \frac{1}{n^2} \right)$

Donc la série $U_n(t)$ est normalement Convergente d'ou est elle unif. Convergente sur $\mathbb{R}$.

• Exercice 2 :

Soit $r \in]0; 1[$

1/ Etudions la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} r^n e^{inx}$

on pose $U_n(x) = r^n e^{inx}$

$= (re^{ix})^n$

(U_n) est une suite géométrique de raison $q = re^{ix}$

avec $|q| = |r| \cdot |e^{ix}| = |r| < 1$

et par Suite $\sum_{n \geq 0} r^n e^{inx}$ Converge.

2/ $S_n = \sum_{k=0}^{n} (re^{ix})^k$

$= \frac{1 - (re^{ix})^{n+1}}{1 - re^{ix}}$

Scanned with CamScanner

Comme $\left|(re^{ix})^{n+1}\right| = r^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-e^{ix}}$

càd $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx} = \frac{1}{1-re^{ix}}$

$$= \frac{1}{(1-r\cos(x)) - ir\sin x}$$

$$= \frac{1-r\cos(x) + ir\sin x}{(1-r\cos x)^2 + (r\sin x)^2}$$

$$r^n \cos(nx) + i\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(nx)$$

$$= \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2\cos^2 x + r^2\sin x} + i\cdot\frac{r\sin x}{1-2r\cos x + r^2\cos^2 x + r^2\sin x}$$

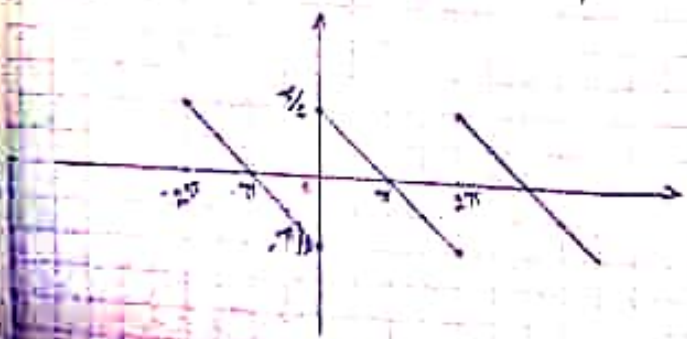
$$\Rightarrow \begin{cases} \sum r^n \cos(nx) = \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2} \\ \sum r^n \sin(nx) = \frac{r\sin x}{1-2r\cos x + r^2} \end{cases}$$

• Exercice 5 :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π périodique

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{Si } x = 0. \end{cases}$$

1/ Montrons que f est impaire.



1/ Soit $x \in [-\pi, \pi]$

donc $-x \in [-\pi, \pi]$

+ Si $x \in [-\pi, 0] \Rightarrow x + 2\pi \in [\pi, 2\pi] \subset [0, 2\pi]$

donc $f(x) = f(x+2\pi) = \frac{\pi - x - 2\pi}{2} = \frac{-x-\pi}{2}$

or on a $-x \in [0, \pi] \Rightarrow f(-x) = \frac{\pi + x}{2}$

donc $f(-x) = f(x)$.

+ Si $x \in [0, \pi] \Rightarrow -x \in [-\pi, 0]$

$\Rightarrow -x + 2\pi \in [\pi, 2\pi]$

et $f(-x) = f(-x+2\pi) = \frac{\pi + x - 2\pi}{2} = \frac{x-\pi}{2} = -f(x)$

• Conclusion :

$\forall x \in [-\pi, \pi]$ $f(x) = -f(x)$

Donc f est impaire.

• La série de Fourier associée à f est :

$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Puisque f est impaire alors $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

Posons :

$$\begin{cases} u(x) = \frac{\pi - x}{2} \\ v'(x) = \sin(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{2} \\ v(x) = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Donc $b_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x \cdot \pi}{2n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2n} \cos(nx)\, dx \right)$

$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2n^2} \left[\sin(nx) \right]_0^{\pi} \right)$

$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}$.

Donc :

$S_f = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(nx)$

2/ f est-elle developpable en série de Fourier.

Sur $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$ la série de Fourier converge vers $f(x)$ (car f est dérivable)

En 0 : f 2π-périodique localement intégrable.

f admet une dérivée generalisée à gauche et à droite en 0.

$$\begin{cases} \lim_{u \to 0^+} \frac{f(0+u) - f(0^+)}{u} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{u \to 0^-} \frac{f(0-u) - f(0^-)}{u} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc la série de Fourier $S_f(x)$ converge en 0 vers $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi/2 + (-\pi/2)}{2} = 0$.

• Conclusion : $S_f(x)$ Converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

et on a :

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$; $x \in \mathbb{R}$

3/ La somme de la série

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

D'après la quest (2).

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$

pour $x = \pi/2$

$f(\pi/2) = \sum \sin(n \cdot \pi/2)$

$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n \cdot \pi/2)}{n}$

$\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

$\pi/4 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(2p \cdot \pi/2)}{2p} = 0$

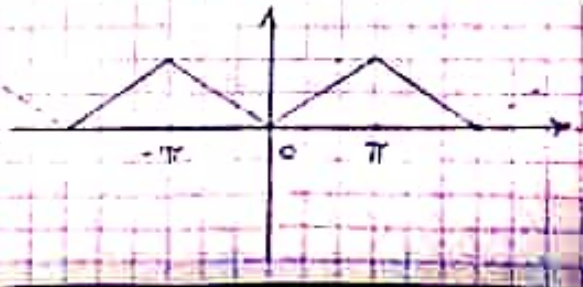
$+ \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1) \cdot \pi/2)}{2p}$

$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

• Exercice 4 :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique.

paire. $f(x) = x$; $[0, \pi]$



Scanned with CamScanner

1/ La Convergence de $SF(f)$:

méthode 1 : f : 2π périodique.
localement intégrable.
dérivable par morceaux.

la série de Fourier $SF(f)$ CV
f vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (car
f est continue sur $\mathbb{R}$.)

méthode 2 : f - 2π périodique
Continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ intégrable,
monotone par morceaux. Donc
d'après le théorème de Jordan
la série de Fourier $SF(f)$ CV
vers $f(x)$ pour tout x et on a

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

2°/ Coefficients de Fourier :

Puisque f est paire, alors
$b_n = 0$.

et $a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$

par parties :

Posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{n} \left[x \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{1}{n} \left[\cos(nx) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left(\cos(n\pi) - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right).$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

Donc la série de Fourier
associée à f est :

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$SF(f) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2} \cos(nx)$$

3/ La somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

La série de Fourier $SF(f)$
converge vers $f(x)$ pour tout
$(x \in \mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \times \cos(nx)$$

Pour $x = 0$:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}((-1)^{p+1}-1) + \sum \frac{1}{(2p)^2}\left((-1)^{2p}-1\right)\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$= \sum \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

• La Somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

Théorème (Identité de Parseval)

Si f - 2π périodique, développable en série de Fourier

Alors :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{x}^{x+2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Si de plus f est paire ou impaire

alors :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum a_n^2 + b_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \sum \left(\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)^2 + 0\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \sum \frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\sum\left(\frac{(-1)^{2p+1}-1}{(2p+1)^2}\right)^2 + \sum\left(\frac{(-1)^{2p}-1}{(2p)^2}\right)^2\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum\left(\frac{-2}{(2p+1)^2}\right)^2 = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

• Exercice 6 :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π périodique

telle que $f(x) = \cos(2x)$

sur $[-\pi, \pi]$

1/ Les coefficients de Fourier :

$f|_{[-\pi,\pi]}$ est paire $\Rightarrow f$ est paire

Donc $\forall n \geq 1$ $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{z}\sin(zx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi z}\left(\sin(\pi z) - \sin(0)\right)$$

$$= \frac{2\sin(\pi z)}{\pi z}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(zx)\cos(nx)\,dx$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(zx+nx) + \cos(zx-nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z+n}\sin((z+n)x) + \frac{1}{z-n}\sin((z-n)x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z+n}\left(\sin((z+n)\pi) + \frac{1}{z-n}\sin(z-n)\pi\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z^2-n^2}\left((z-n)\sin(z+n)\pi\right)\right.$$

$$\left. + (z+n)\sin(z-n)\pi\right)$$

$$= \frac{1}{\pi(z^2-n^2)}\left[(z-n)\left(\sin(z\pi)\cos(n\pi)\right.\right.$$

$$\left. + \sin(n\pi)\cos(\pi z)\right)$$

$$+ (z+n)\left(\sin(\pi z)\cos(n\pi)\right.$$

$$\left.\left. - \sin(n\pi)\cos(\pi z)\right)\right]$$

Donc :

$$a_n = \frac{1}{\pi(z^2-n^2)}\left[\sin(z\pi)\cos(n\pi)\right.$$

$$\left.\left((z+n) - (z-n)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(z^2-n^2)}\left[2z(-1)^n \sin(\pi z)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2z(-1)^n}{\pi(z^2-n^2)}\sin(\pi z)}$$

2/ On a f est 2π-périodique, Continue, dérivable.

Donc d'après le th. de Dirichlet, la Série de Fourier Converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx)$$

$$\Rightarrow \cos(zx) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

$$+ \frac{2z}{\pi}\sin(\pi z)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}\cos(nx)$$

3/

pour $x = \pi$ on a :

$$\cos(z\pi) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sin(\pi z)$$

$$\cdot \sum \frac{(-1)^n}{z^2-n^2}\cos(n\pi)$$

$$\frac{1}{\tan(z\pi)} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum \frac{(-1)^{2n}}{z^2-n^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\tan(z\pi)} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum \frac{1}{z^2-n^2}}$$

4/ La Somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2-n^2}$

on a :

$$\cos(zx) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}$$

$$\sin(\pi z)\sum \frac{(-1)^n}{z^2-n^2}\cos(nx)$$

• pour $x = 0$, on a :

$$\cos(0) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sin(\pi z)$$

$$\cdot \sum \frac{(-1)^n}{z^2-n^2} = 1$$

Scanned with CamScanner

$\sin(\pi z)\sum \frac{(-1)^n}{z^2-n^2} = 1 - \frac{\sin(\pi z)}{(\pi z)}$

$\sum \frac{(-1)^n}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{2z\sin(\pi z)}\left(1 - \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right)$

$= \frac{\pi}{2z\sin(\pi z)} - \frac{1}{2z^2}$

$= \frac{1}{2z}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} - \frac{1}{z}\right)$.

. Exercice 11 :

$f(x) = e^x \sin(x)$ sur $[-\pi, \pi[$

f 2π-périodique.

1/ Convergence :

f est 2π périodique
dérivable sur $[-\pi, \pi[$
dérivable à gauche de π

Alors la série de Fourier $SF(f)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Soit

2/ Soit $p \in \mathbb{N}$

$I_p = \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{ipx}\,dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+ip)x}\,dx$

$= \frac{1}{1+ip}\left[e^{(1+ip)x}\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= \frac{1}{1+ip}\left(e^{(1+ip)\pi} - e^{-(1+ip)\pi}\right)$

$I_p = \frac{1}{1+ip}\left(e^{\pi}e^{ip\pi} - e^{-\pi}e^{-ip\pi}\right)$

$= \frac{1}{1+ip}(-1)^p\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$

$= \frac{2\cdot(-1)^p}{1+ip}\,\mathrm{Sh}(\pi)$

$= \frac{2\cdot(-1)^p\,\mathrm{Sh}(\pi)}{1+p^2}(1-ip)$

$= 2\,\mathrm{Sh}(\pi)\cdot\frac{(-1)^p}{1+p^2} - i\frac{2p\,\mathrm{Sh}(\pi)(-1)^p}{1+p^2}$

3/ Les coefficients de Fourier :

$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sin(x)\cos(nx)\,dx$

$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sin((n+1)x) - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\sin((n-1)x)\,dx$.

$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,\mathrm{Im}\left(e^{i(n+1)x}\right)dx - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\,\mathrm{Im}\left(e^{i(n-1)x}\right)dx\right.$

$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{Im}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{i(n+1)x}\,dx\right) - \mathrm{Im}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{i(n-1)x}\,dx\right)\right.$

$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{Im}(I_{n+1}) - \mathrm{Im}(I_{n-1})\right)$

(En utilisant la quest 2)

$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2(n+1)\,\mathrm{Sh}(\pi)(-1)^{n+1}}{1+(n+1)^2} + \frac{2(n-1)\,\mathrm{Sh}(\pi)(-1)^{n-1}}{1+(n-1)^2}\right)$

$= \frac{\mathrm{Sh}(\pi)}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{1+(n+1)^2} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{1+(n-1)^2}\right)$

$= \frac{\mathrm{Sh}(\pi)}{\pi}(-1)^n\left(\frac{(n+1)(-1)^2}{n^2+2+2n} - \frac{n-1}{n^2+2-2n}\right)$

$= \frac{\mathrm{Sh}(\pi)}{\pi}(-1)^n\left(\frac{(n+1)(n^2+2-2n)}{(n^2+2)^2-4n^2} - \frac{(n-1)(n^2+2+2n)}{(n^2+2)^2-4n^2}\right)$

Scanned with CamScanner

$= \frac{Sh(\pi)}{\pi}(-1)^n \left(\frac{n^3+2n-2n^3+n^2+2-2n}{n^4+4n^2+4-4n^2} + \frac{-n^3-2n-2n^3+n^2+2n+2}{n^4+4n^2-4-4n^2} \right)$

$= \frac{2Sh(\pi)}{\pi}(-1)^n \left(\frac{2-n^2}{n^4+4} \right)$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x) \sin(nx)\, dx$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} e^x \left(\cos((1-n)x) - \cos((1+n)x) \right) dx$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos((n-1)x)\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos((n+1)x)\, dx$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x Re\left(e^{i(n-1)x} \right) dx - \int_{-\pi}^{\pi} e^x Re\left(e^{i(n+1)x} \right) dx$

$= \frac{1}{2\pi} Re\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{i(n-1)x}\, dx \right) - Re\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{i(n+1)x}\, dx \right)$

$= \frac{1}{2\pi} \left(Re(I_{n-1}) - Re(I_{n+1}) \right)$

$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\,Sh(\pi)(-1)^{n-1}}{1+(n-1)^2} - \frac{2Sh(\pi)(-1)^{n+1}}{1+(n+1)^2} \right)$

$= \frac{Sh(\pi)(-1)^n}{\pi} \left(\frac{-1}{n^2+2-2n} + \frac{1}{n^2+2+2n} \right)$

$= \frac{Sh(\pi)}{\pi}(-1)^n \left(\frac{-n^2-2-2n+n^2+2-2n}{(n^2+2)^2-4n^2} \right)$

$= \frac{Sh(\pi)}{\pi}(-1)^n \cdot \frac{-4n}{n^4+4}$

$= \frac{Sh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4n}{n^4+4}$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x)\, dx$

$= \frac{1}{\pi} \cdot Im\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{ix}\, dx \right)$

$= \frac{1}{\pi} Im(I_n)$

$= \frac{-1}{\pi} \cdot \frac{2\,Sh(\pi)}{1+1}(-1)^n$

$a_0 = \frac{Sh(\pi)}{\pi}$

4/ La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2-n^2}{n^4+4}$

La série de Fourier CV vers $f(x)$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

$= \frac{Sh(\pi)}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2Sh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n(2-n^2)\cos(nx)}{n^4+4}$

$\Rightarrow \frac{2Sh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2-n^2}{n^4+4} = \frac{-Sh(\pi)}{2\pi}$

$\Rightarrow \sum_{n=1} \frac{2-n^2}{n^4+4} = \frac{-1}{4}$

nous devons ajouter le premier terme (pour $n=0$)

$\Rightarrow \sum_{n=0} \frac{2-n^2}{n^4+4} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Exercice 15 :

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fct périodique

Tque :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} & \text{Si } x \in [-1,0[\\ g(x) = x & \text{Si } x \in [0,1[\end{cases}$$

Scanned with CamScanner

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,\cos(n\omega x)\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_{0}^{1} f(x)\,\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_{-1}^{0} + \left[x\,\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_{0}^{1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}\times 0 + \left[0 + \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} - \frac{1}{(n\pi)^2}\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} - \frac{1}{(n\pi)^2}.$$

$f(x)$

$(\ldots)$

Scanned with CamScanner

Université Sidi Mohammed Ben abdellah
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Série de T.D. $N2$
Transformée de laplace

Exercice 0.1 *Trouver la transformée de Laplace de chacune des fonctions suivantes :*

$$f(t) = \begin{cases} 2t+1 & si\ t \in [0;1] \\ 0 & si\ t \in]-\infty;0[\cup[1;+\infty[\end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in]-\infty;5] \\ 3 & si\ t \in]5;+\infty[\end{cases}$$

Exercice 0.2 *Les fonctions considérés suivantes sont définies sur $[0;+\infty[$. Déterminer la Transformée de Laplace des fonctions suivantes :*

$(1) : t \to 3e^{-4t}$ $(2) : t \to 7e^{3t}$ $(3) : t \to (t^2+t)^2$.

$(4) : t \to a\cos(3t) + b\sin(3t)$ $(5) : t \to ach(4t) + bsh(4t)$ $(6) : t \to (t^2+t)e^{-2t}$.

$(7) : t \to e^{-4t}\cos(2t)$ $(8) : t \to e^{-4t}(\cos(3t) + b\sin(3t))$ $(9) : t \to (e^{-2t}ch(6t)$.

Exercice 0.3 *Soit $f(t) = t^2e^{3t}\sin(t)$ et $g(t) = (3t+2)te^{3t}\sin(t) + t^2e^{3t}cos(t)$*

1. *Trouver $\mathcal{L}(f(t))(p)$*
2. *Déterminer $\mathcal{L}(g(t))(p)$. (par deux méthode différentes).*

Exercice 0.4 *Soit ω un nombre réel, on pose $f(t) = t\sin(\omega t)$.*

1. *Vérifier que : $f''(t) = 2\omega\cos(\omega t) - \omega^2 f(t)$.*
2. *En déduire la transformée de Laplace de f.*
3. *Déterminer transformée inverse de Laplace de la fonction $\frac{p}{(p^2+3)^2}$.*

Exercice 0.5 *Trouver les transformées inverse de Laplace suivantes.*

$(1) : \mathcal{L}^{-1}(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)})$ $(2) : \mathcal{L}^{-1}(\frac{3p+7}{p^2-2p-3})$.
$(3) : \mathcal{L}^{-1}(\frac{p-1}{(p^2+2p+5)})$ $(4) : \mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+4p+6})$.

Exercice 0.6 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$(1) : y' + 3y = 0$ *avec* $y(0) = 4$.
$(2) : y' + 3y = \cos(t)\mathcal{H}(t)$ *avec* $y(0) = 0$.
$(3) : y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = e^{-2t}\mathcal{H}(t)$ *avec* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$.
$(5) : y''(t) + y(t) = e^t\cos(t)\mathcal{H}(t)$ *avec* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$.
$(4) : y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.

Scanned with CamScanner

Exercice 0.7 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y''(t) - \frac{5}{2}y'(t) + y(t) = \frac{5}{2}\sin(t)\mathcal{H}(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 2.$$

Exercice 0.8 *Oscillateurs couplés*
Les petites amplitudes d'oscillation de deux oscillateurs couplés satisfont le système différentiel :

$$f(t) = \begin{cases} y_1''(t) + \omega^2 y_1'(t) + k y_2''(t) = h(t) \\ y_2''(t) + \omega^2 y_2'(t) + k y_1''(t) = 0 \end{cases}$$

où $k \in]0,1[$ est l'indice de couplage et $h(t)$ la sollicitation extérieur. Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} y_1(0) = a; \quad y_1'(0) = 0 \\ y_2(0) = b; \quad y_2'(0) = 0 \end{cases}$$

A l'aide de la Transformation de Laplace déterminer la solution dans les deux cas suivants :

1. *Oscillations libres : $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $h(t) = 0$.*
2. *Oscillations forcées : $a = b = 0$ et $h(t) = \cos(\omega_0 t)$.*

Exercice 0.9 *Soient $\alpha, \beta \in]0; +\infty[$, on considère la fonction définie par $f(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{\beta t}}{t}$.*

1. *Trouver la Transformée de Laplace de f.*
2. *En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.*

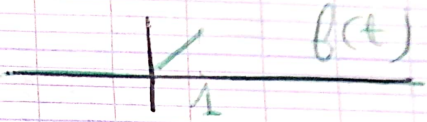
Exercice 0.10

1. *Déterminer une fonction causale f telle que : pour tout $t \geq 0$: $\int_0^t e^{t-x} f(x)dx = sin(t)$.*
2. *Déterminer une fonction causale f telle que : pour tout $t \geq 0$: $f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x)dx = \cos(t)$.*

Scanned with CamScanner

$\frac{2}{n=1} \frac{n^2\pi^2}{4}$

Exo 1 Serie N2



$$f(t) = \begin{cases} 2t+1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{si } t \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

$f : \mathbb{R} \to K \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(f) \subset \mathbb{C} \to K$

$$\mathcal{L}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \quad \text{car } f \text{ est causal}$$

Scanned with CamScanner

$\begin{cases} f(t) \text{ est causal} \\ \exists M=1,\ \alpha=1, A=1\ \forall t \geq A=1 \quad f(t) \leq e^t \end{cases}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}$

Donc f admet un T.L

et on :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (2t+1)\, e^{-pt}\, dt \quad \int_0^1$$

$$\begin{cases} u'(t) = e^{-pt} \\ v(t) = 2t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \frac{-1}{p} e^{-pt} \\ v'(t) = 2 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{L}(f)(p) = \left[\frac{-(2t+1)}{p} e^{-pt} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2}{p} e^{-pt} dt$

$$= \left(\frac{-3}{p} - \frac{2}{p^2} \right) e^{-p} + \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}$$

p. cours $p = 0$

$$\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \qquad e^0 = 1$$

$$= \int_0^1 (2t+1)\, dt$$

$$= 2$$

$$\mathcal{L}(f) = \begin{cases} \left(\frac{-3}{p} - \frac{2}{p^2} \right) e^{-p} + \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} & p \neq 0 \\ 0 & p = 0 \end{cases}$$

2)

$$f(t) : \begin{cases} 0 & t \in]-\infty, 5] \\ 3 & t \in]5, +\infty[\end{cases}$$

$\begin{cases} f \text{ causal} \\ \exists M=3,\ \alpha=1, A=5 \quad \forall t \geq A \quad f(t) \leq 3e^t \end{cases}$

Scanned with CamScanner

donc $f \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow f$ admet un TL

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_5^{+\infty} 3\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_5^R 3 e^{-pt}\, dt$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \frac{-3}{p} e^{-pR} + \frac{3}{p} e^{-5p}$$

On pose $p = a + ib$

On a $e^{-pR} = e^{-aR} e^{-ibR}$

$\Rightarrow |e^{-pR}| = e^{-aR} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$ dès que $a > 0$

$\Rightarrow \lim_{R \to +\infty} e^{-pR} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{C}$ $Re(p) > 0$

Donc $\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{3}{p} e^{-5p}$ $\forall p \in \mathbb{C}$ tq $Re(p) > 0$

Rque pour $p = 0$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \int_5^{+\infty} 3\, dt \text{ div}$$

Exo 2

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(p)$
$H(t)$	$\frac{1}{p}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{1}{p^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Scanned with CamScanner

t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at} f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(p-a)$

EXO 2

(1) $t \to 3e^{-4t}$

$$\mathcal{L}(3e^{-4t})_{(p)} = 3 \times \mathcal{L}(e^{-4t}) = \frac{3}{p+4}$$

(3) $\mathcal{L}((t^2+t)^2)(p) = \mathcal{L}(t^4 + 2t^3 + t^2)$

$$= \frac{4!}{p^5} + \frac{3!}{p^4} + \frac{2!}{p^3}$$

(5) $f(t) \to a\,ch(4t) + b\,sh\,4t$

$$\mathcal{L}(ch(\omega t)(p)) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right)(p)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2p}{p^2-\omega^2} = \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(sh\,\omega(t))(p) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

(7) $\mathcal{L}(e^{-4t}\cos(2t))(p) = \mathcal{L}(\cos 2t)\ p+4$

Scanned with CamScanner

Exo 3

(1) $f(t) = t^2 e^{3t} \sin t$

$$\text{"} t^n f(t) \longrightarrow (-1)^n \times \mathcal{L}\{f\}(p)^{(n)}$$

$$\mathcal{L}(\sin t)(p) = \frac{1}{p^2+1}$$

$$= \mathcal{L}\, e^{3t} \sin t = \mathcal{L} \sin t\,(p-3)$$

$$= \frac{1}{(p-3)^2+1}$$

$$\mathcal{L}\, t^2 e^{3t} \sin t = (-1)^2 \times \left(\mathcal{L}\, e^{3t} \sin(t)(p)\right)''$$

$$= \left(\frac{1}{(p-3)^2+1}\right)''$$

$$= \frac{-2p^2+12p-20+4(p-3)(2p-6)}{(p^2-6p+10)^3}$$

Exo 4

1) $f(t) = t \sin(\omega t)$

$\Rightarrow f''(t) = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t$

2) En déduire $\mathcal{L}(f(t))(p)$

dérivé

$$\mathcal{L}(f^{n}(t)(p) = p^n \mathcal{L}(f(t)(p) + \cdots +$$

$$\mathcal{L}\, f''(t) = \mathcal{L}(2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t)$$

$$\mathcal{L}(f''(t))(p) = p^2 F(p)$$

$$\mathcal{L}(2\omega \cos \omega t) = \frac{2\omega p}{p^2+\omega^2} - \omega F(p)$$

$-\omega^2 f(t)$

$$p^2F(p) + \omega^2 F(p) = \frac{2\omega p}{p^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad F(p) = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+3)^2}\right)$

pour $\omega = \sqrt{3}$

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{2\sqrt{3}\,p}{(p^2+3)^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}\,p}{(p^2+3)^2}\right.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+\omega^2)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times f(t) = \frac{t\sin\sqrt{3}t}{2\sqrt{3}}$$

Scanned with CamScanner

Série n°2

Exos

1) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right)$

on a: $\frac{p+2}{(p+3)(p+4)} = \frac{2}{p+4} - \frac{1}{p+3}$

Comme $\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+4}\right) = e^{-4t}H(t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right) = e^{-3t}H(t) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\quad) = (2e^{-4t} - e^{-3t})H(t)$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{p^2+2p+5}\right)$

$\frac{p-1}{p^2+2p+5} = \frac{p-1}{(p+1)^2+4} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} - \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$

Comme $\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+2^2}\right) = \cos(2t)H(t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+2^2}\right) = \sin(2t)H(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+2}\right) = e^{-t}\cos(2t)H(t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p+1)^2+2}\right) = e^{-t}\sin(2t)H(t) \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{p^2+2p+5}\right) = (\cos(2t) - \sin(2t))e^{-t}H(t)$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3p+7}{p^2-2p-3}\right)$

$\frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{3(p+7/3)}{(p-1)^2-4} = 3\left(\frac{p-1}{(p-1)^2-2^2} + \frac{5}{3}\frac{2}{(p-1)^2-2^2}\right)$

si $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2-2^2}\right) = \operatorname{ch}(2t)H(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2-2^2}\right) = \operatorname{ch}(2t)e^{t}H(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2-2^2}\right) = \operatorname{sh}(2t)H(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(p-1)^2-2^2}\right) = \operatorname{sh}(2t)e^{t}H(t)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\quad) = (3\operatorname{ch}(2t) + 5\operatorname{sh}(2t))e^{t}H(t)$

Scanned with CamScanner

4) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4p+6}\right)$

$$\frac{p}{p^2+4p+6} = \frac{p}{(p+2)^2+\sqrt{2}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,p\,\frac{\sqrt{2}}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{p^2+\sqrt{2}^2}\right) = \sin(\sqrt{2}t)\,H(t) = f(t)$$

$\Rightarrow$ let $f(0)=0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p\sqrt{2}}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}\right) = \sin(\sqrt{2}t)\,e^{-2t}\,H(t) = g(t)$$

or $g(0)=0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\,p}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}\right) = g'(t)$$

$$= \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\,e^{-2t} - 2\sin(\sqrt{2}t)\,e^{-2t}$$

$$= \left(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) - 2\sin(\sqrt{2}t)\right)e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\text{——}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) - 2\sin(\sqrt{2}t)\right)e^{-2t}\,H(t)$$

$$= \left(\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\right)e^{-2t}\,H(t)$$

——————

Scanned with CamScanner

Exo 6

1) Resoudre $y' + 3y = 0$ (1) $y(0) = 4$.

on pose $F(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y'(t))(p) = pF(p) - f(0) = pF(p) - 4$

(1) $\Rightarrow pF(p) - 4 + 3F(p) = 0$

$\Rightarrow F(p)(p+3) = 4$

$\Rightarrow F(p) = \frac{4}{p+3}$.

$\Rightarrow F(p) = 4e^{-3t} H(t)$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = 4e^{-3t} H(t)}$

2) $y' + 3y = \cos(t) H(t)$ $\quad y(0) = 0$

on note $F(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y'(t))(p) = pF(p) - f(0) = pF(p)$

$\mathcal{L}(\cos(t)) = \frac{p}{p^2+1}$

(E) $\Rightarrow pF(p) + 3F(p) = \frac{p}{p^2+1}$

$\Rightarrow F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p+3)}$.

$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{10}\left(\frac{3p+1}{p^2+1} - \frac{3}{p+1}\right)$

$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{10}\left(\frac{3p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{p+1}\right)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{10}\left(3\cos(t) + \sin(t) - 3e^{-t}\right) H(t)$

donc $y(t) = \frac{1}{10}\left(3\cos(t) + \sin(t) - 3e^{-t}\right) H(t)$

Scanned with CamScanner

3) $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = e^{2t} H(t)$ (E)

on pose $F(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$

$\mathcal{L}(y'(t))(p) = p\mathcal{L}(y(t))(p) - y(0) = pF(p) - 0$

$\mathcal{L}(y''(t))(p) = p^2 F(p) - p\,y(0) - y'(0)$

$= p^2 F(p)$

$\mathcal{L}(e^{2t})(p) = \frac{1}{p+2}$.

(E) $p^2 F(p) + 6pF(p) + 9F(p) = \frac{1}{p+2}$.

$F(p) = \frac{1}{(p+2)(p^2+6p+9)} = \frac{1}{(p+2)(p+3)^2}$

$= \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} - \frac{1}{(p+3)^2}$.

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = e^{2t} - e^{-3t} - te^{-3t}$

$= e^{2t} - (1+t)e^{-3t}$

($\mathcal{L}(t)(p) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow \mathcal{L}(te^{-3t})(p) = \mathcal{L}(t)(p+3) = \frac{1}{(p+3)^2}$)

Scanned with CamScanner

Exercice 09

Soient $a, b \in]0,+\infty[$. $f(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cdot H(t)$

1) Trouver la transformée de Laplace de $f(t)$

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$

---

1) on pose $F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$

on sait que $\mathcal{L}^{-1}(F^{(n)}(p)) = (-1)^n t^n f(t)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F'(p)) = -1\, t f(t) = -(e^{-at} - e^{-bt}) = e^{-bt} - e^{-at}$

$\Rightarrow F'(p) = \mathcal{L}(e^{-bt} - e^{-at})(p)$

$\Rightarrow F'(p) = \dfrac{1}{p+b} - \dfrac{1}{p+a}$.

donc $F(p) = \ln(p+b) - \ln(p+a)$

$$\boxed{F(p) = \ln\left(\frac{p+b}{p+a}\right)}$$

Sous réserve de l'existence

2) on prend $p = 0$, on obtient

$$F(0) = \mathcal{L}(f(t))(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = F(0) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Scanned with CamScanner

Exo 10

1) Déterminer une fonction causale f vérifiant :

$$\forall t \geq 0 \quad \int_0^t e^{t-x} f(x)\, dx = \sin(t) \qquad (1)$$

2) Même question : tque :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x)\, dx = \cos(t)$$

---

1) Soit f une fct causale tque $\forall t \geq 0 \int_0^t e^{t-x} f(x)\, dx = \sin(t)$

le terme de gauche est un produit de convolution $g * f$

où $g(t) = e^t H(t)$

(1) $\Leftrightarrow$ $g * f(t) = \sin(t)$

en effectuant une transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}(g * f(t))(p) = \mathcal{L}(\sin(t))(p)$$

$$\mathcal{L}(g(t))(p)\, \mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(\sin(t))(p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p+1} F(p) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow F(p) = \frac{p-1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}$$

(remontant à la fct causale)

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \cos(t) - \sin(t) \quad (H(t))$$

Réciproquement, si $f(t) = \cos(t) - \sin(t)$: elle vérifie (1)

2) (2) $\Leftrightarrow$ $f(t) + g * f(t) = \cos(t)$ où $g(t) = e^{-t} H(t)$

Appliquons la transformée de Laplace ;

$$F(p) + \mathcal{L}(g(t))(p) . F(p) = \mathcal{L}(\cos(t))(p)$$

$$\Rightarrow F(p)\left(1 + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow F(p) \frac{p+2}{p+1} = \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow F(p) = \frac{p(p+1)}{(p^2+1)(p+2}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{2}{p+2} - \frac{3p-1}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \ldots$$

Scanned with CamScanner

Exo 1

Soient f, g deux fct de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues

tq : $\forall t \in \mathbb{R}$: $f(t) = g(t) + \int_0^t (t-u) g(u)\,du$ (1)

M que : $\forall t \in \mathbb{R}$: $g(t) = f(t) - \int_0^t \sin(t-u) f(u)\,du$ (2)

---

(1) $\Leftrightarrow$ $f'(t) = g(t) + h * g(t)$ où $h(t) = t$.

En effectuant la transformée de Laplace à gauche et à droite on obtient : $F(p) = G(p) + H(p) \cdot G(p)$ $\qquad H(p) = \mathcal{L}(t)(p) = \frac{1}{p^2}$

$F(p) = G(p)\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)$

$= G(p)\left(\frac{p^2+1}{p^2}\right)$ $\qquad \frac{p^2}{p^2+1} = 1 - \frac{1}{p^2}$

$\Rightarrow G(p) = \frac{p^2}{p^2+1} F(p)$

$G(p) = F(p) - \frac{1}{p^2+1} F(p)$

$G(p) = F(p) - \mathcal{L}(\sin(t))(p)\, F(p)$

On remonte à) on applique la transformée inverse

$g(t) = f(t) - \sin * f(t)$

$\boxed{g(t) = f(t) - \int_0^t \sin(t-u) f(u)\,du}$ (2)

Scanned with CamScanner

Université Sidi Mohammed Ben abdellah
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Année universitaire 2019-2020
Filière CP2 Analyse 4

H. Benbouziane

Série de T.D. $N2$
Transformée de Fourier

Exercice 0.1 *On considère la fonction f définie par :* $f(t) = \begin{cases} 1+t & si\ t \in [-1;0] \\ 1-t & si\ t \in [0;1] \\ 0 & si\ |t| \geq 1 \end{cases}$

1. *Déterminer la Transformée de Fourier de f.*
2. *En déduire la valeur de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Exercice 0.2 *On considère la fonction f définie par :* $f(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [-2;2] \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. *Déterminer la Transformée de Fourier de f.*
2. *En déduire la valeur de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 0.3 *Soit $a > 0$. On considère la fonction f définie par :* $f(t) = e^{-at^2}$.

1. *Vérifier que f est solution de de l'équation différentielle* (1) : $y' + 2axy = 0$.
2. *En appliquant la T. de Fourier à l'équation* (1), *donner une équation différentielle vérifiée par* $\hat{f}$.
3. *Déterminer la Transformée de Fourier de f.*

Exercice 0.4 *On considère la fonction f définie par :* $f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & si\ t \in [-1;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. *Déterminer la Transformée de Fourier de f.*
2. *En déduire la valeur de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3} \cos(\frac{x}{2}) dx$.

Exercice 0.5 *On considère la fonction f définie par :* $f(t) = e^{-a|x|}$ *où* $a > 0$.

1. *Déterminer la Transformée de Fourier de f.*
2. *En déduire la valeur de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2+4\pi^2} dx$, *pour tout* $\omega \in \mathbb{R}$.
3. *Déterminer la Transformée de Fourier de la fonction définie par* $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *(utiliser la Transformée inverse).*
4. *Calculer le produit de convolution $f \star f$, puis en déduire la Transformée de Fourier de la fonction définie par* $h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
5. *Déterminer la Transformée de Fourier de la fonction définie par* $k(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.
6. *Prenons $a = 1$. Soit y une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation suivante :* (1) : $y(t) = e^{-|t|} + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} y(x) dx$, *où* $\alpha > 0$.
   (a) *Écrire cette équation en utilisant le produit de convolution.*
   (b) *Supposons qu'il existe une fonction intégrable y vérifiant* (1). *Déterminer la Transformée de Fourier de y, puis en déduire que* $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$
   (c) *Réciproquement supposons que* $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$. *Montrer que l'équation* (1) *admet une solution unique et la déterminer.*

Scanned with CamScanner

Université Sidi Mohammed Ben abdellah
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Correction Série de T.D. $N2$
Transformée de Fourier

Exercice 0.1 *Correction 1*

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & si\ t \in [-1;0] \\ 1-t & si\ t \in [0;1] \\ 0 & si\ |t| \geq 1 \end{cases}$$

Tracer la courbe SVP.

1. *Déterminons la Transformée de Fourier de f.*
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid dt = 2\int_0^1 1-tdt < \infty \implies f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
   Pour $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi\omega t}dt \\ &= 2\int_0^1 (1-t).\cos(2\pi\omega t)dt \\ &= 2\{\frac{1}{2\pi\omega}[(1-t)\sin(2\pi\omega t)]_0^1 + \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^1 \sin(2\pi\omega t)dt\} \\ &= 2\{0 - \frac{1}{(2\pi\omega)^2}[\cos(2\pi\omega t)]_0^1\}. \\ &= -\frac{2}{(2\pi\omega)^2}[\cos(2\pi\omega) - 1]. \\ &= \frac{(\sin(\pi\omega)^2}{(\pi\omega)^2}. \end{aligned}$$

   (Rappel : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$*)*
   Pour $\omega = 0$
   $\mathcal{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+1} 1-tdt = 1$.
   Remarque :
   $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. *La valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}dx$. On a f est fonction de classe C^1 par morceaux et $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid^2 dt = \int_0^{+1} \mid f(t) \mid^2 dt$ converge.*
   Donc f est de carré sommable sur $\mathbb{R}$.
   D'après l'égalité de Parseval on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \hat{f}(\omega) \mid^2 d\omega.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid \frac{(\sin(\pi\omega)^2}{(\pi\omega)^2} \mid^2 dt = 2\int_0^1 (1-t)^2 d\omega.$$

Scanned with CamScanner

$$2\int_0^{+\infty} \mid \frac{(\sin(2\pi\omega)^2}{(\pi\omega)^2} \mid^2 dt = \frac{2}{3}$$

avec le changement de variable $x = \pi\omega$ *on obtient* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 0.2

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [-2;2] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Tracer la courbe SVP.

1. *La Transformée de Fourier de* f.
   La fonction f *est localement intégrable sur* $\mathbb{R}$ *(elle est continue par morceaux).*
   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid dt = \int_{-2}^{2} dt < \infty \implies f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
   Donc $\hat{f}$ *existe.*
   Pour $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi\omega t} dt \\ &= \int_{-2}^{2} e^{-2i\pi\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{2\pi\omega}[e^{-2i\pi\omega t}]_{-2}^{2} \\ &= \frac{-1}{2\pi\omega}[e^{-4i\pi\omega} - e^{4i\pi\omega}] \\ &= \frac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega}. \end{aligned}$$

   Pour $\omega = 0$
   $\mathcal{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 4$.
   Remarque :
   $\mathcal{F}(f)$ *est continue sur* $\mathbb{IR}$.

2. *La valeur de l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.
   Remarque *:* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *mais* $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
   (car la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ *n'appartient pas* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *).*
   Nous devrons, donc, appliquer le Th 5.5.

$$\begin{cases} \bullet f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \\ \bullet f \text{ est de classe } C^1 \quad \text{Donc, d'après Th 5.5,} \\ \bullet f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{evident.} \end{cases}$$

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} \hat{f}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

   c.à.d

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega} e^{2i\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega} \cos(2\pi\omega t) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega} \sin(2\pi\omega t) d\omega = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

Scanned with CamScanner

Comme $\omega \mapsto \dfrac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega}\sin(2\pi\omega t)$ *est une fonction impaire,*

alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega}\sin(2\pi\omega t)d\omega = 0.$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega}\cos(2\pi\omega t)d\omega = \frac{1}{2}(f(t^+)+f(t^-)) = f(t) = \begin{cases} 0 & si \mid t \mid > 2 \\ 1 & si \ -2 < t < 2 \\ \dfrac{1}{2} & si\ t \in \{-2,2\} \end{cases}$$

On prend $t = 0$, *on obtient*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega}d\omega = 1.$$

C'est à dire $\quad 2\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(4\pi\omega)}{\pi\omega}d\omega = 1.$

Finalement, avec le changement de variable $x = 4\pi\omega$, *on obtient*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 0.3 *Soit* $a > 0$. *On considère la fonction* f *définie par :* $f(t) = e^{-at^2}$.

1. *Vérifier que* f *est solution de de l'équation différentielle* (1) *:* $y' + 2axy = 0$.
2. *Équation différentielle vérifiée par* $\hat{f}$. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f}$ *existe.*

   D'une part

   $$\begin{cases} \bullet f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \\ \bullet f \text{ est de classe } C^1 \\ \bullet \lim\limits_{|t|\to\infty} f(t) = \lim\limits_{|t|\to\infty} e^{-at^2} = 0. \end{cases} \implies \mathcal{F}(f')(\omega) = 2i\pi\omega\mathcal{F}(f)(\omega).$$

   D'autre part, si on pose $g(t) = tf(t)$ *on a*

   $$\begin{cases} \bullet f \text{ admet une } T.F \\ \bullet g \text{ admet une } T.F \text{ (simple à vérifier)} \end{cases} \implies \frac{d}{d\omega}(\mathcal{F}(f)(\omega)) = -2i\pi\mathcal{F}(g)(\omega).$$

   c.à.d $\mathcal{F}(g)(\omega) = \dfrac{-1}{2i\pi}\dfrac{d}{d\omega}(\mathcal{F}(f)(\omega))$.

   La linéarité de transformée de Fourier nous permet d'écrire l'équation (1) *sous la forme :*

   $$2i\pi\omega\hat{f}(\omega) + \frac{2a}{-2i\pi}\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega).$$

   c.à.d $\quad 4\pi^2\omega\hat{f}(\omega) + 2a\dfrac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega).$

   Donc $\hat{f}$ *est solution de l'équation différentielle* $\quad (2) : 4\pi^2\omega y + 2ay'.$
3. *Détermination de* $\hat{f}$.

   l'équation différentielle (2) *a pour solution* $y = \alpha e^{\dfrac{-\pi^2}{a}\omega^2}$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Donc $\hat{f}(\omega) = \alpha e^{\dfrac{-\pi^2}{a}\omega^2}$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Pour $\omega = 0$, $\omega = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

   conclusion

   $$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{\dfrac{-\pi^2}{a}\omega^2}.$$

Exercice 0.4 *On considère la fonction* f *définie par :* $f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & si\ t \in [-1;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

Scanned with CamScanner

1. *La Transformée de Fourier de* f.
   La fonction f *est continue sur* $\mathbb{R} \implies f$ *est localement intégrable sur* $\mathbb{R}$.
   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid dt = 2\int_0^1 \mid 1-t^2 \mid dt < \infty \implies f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
   Pour $\omega \neq 0$,
   Puisque f *est paire, alors*

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2i\pi\omega t}dt \\ &= \frac{\sin(2\pi\omega) - 2\pi\omega\cos(2\pi\omega)}{2(\pi\omega)^3}. \end{aligned}$$

2. *La valeur de* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3}\cos(\frac{x}{2})dx$.
   f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
   Donc $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega).e^{2i\pi\omega t}d\omega$.
   Puisque $\hat{f}$ *est paire, alors*

$$f(t) = 2\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega).\cos(2\pi\omega t)d\omega.$$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega).\cos(2\pi\omega t)d\omega. \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\omega) - 2\pi\omega\cos(2\pi\omega)}{2(\pi\omega)^3}.\cos(2\pi\omega t)d\omega. \end{aligned}$$

   avec le changement $x = 2\pi\omega$, *on obtient*

$$f(t) = 8\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}.\cos(xt)\frac{1}{2\pi}dx.$$

   Le choix $t = \dfrac{1}{2}$ *donne :*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}\cos(\frac{x}{2})dx = \frac{2\pi}{8}.f(\frac{1}{2}) = \frac{3\pi}{16}.$$

Scanned with CamScanner

Exos $f(t) = e^{-a|t|}$ $a>0$.

1) Transformée de Fourier def.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f est loc^{te} intégrable sur $\mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ ($\leftarrow f$ est paire)

$$= \lim_{R\to+\infty} 2\left[\frac{1}{-a} e^{-at}\right]_0^R = \lim_{-a} \frac{2}{-a}\left(e^{-aR} - 1\right) = \frac{2}{a} < \infty$$

$\left(\lim_{R\to+\infty} e^{-aR} = 0\right)$

donc f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

- $\hat{f}(w) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi w t)\,dt$ puisque f est paire.

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(2\pi w t)\,dt$$

$$\hat{f}(w) = \lim_{x\to+\infty} 2\underbrace{\int_0^x e^{-at}\cos(2\pi w t)\,dt}_{= I_x} \quad (*)$$

Avec l'intégration par parties

$$I_x = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\cos(2\pi w t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-at}}{a}\sin(2\pi w t)\cdot 2\pi w\,dt$$

$$= \frac{-e^{-ax}\cos(2\pi w x) + 1}{a} - \frac{2\pi w}{a}\left\{\left[\frac{e^{-at}}{-a}\sin(2\pi w t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{2\pi w}{a} e^{-at}\cos(2\pi w t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1 - e^{-ax}\cos(2\pi w x)}{a} + \frac{2\pi w}{a^2}\left[e^{-ax}\sin(2\pi w x)\right] - \frac{(2\pi w)^2}{a^2} I_x$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{(2\pi w)^2}{a^2}\right) I_x = \frac{1 - e^{-ax}\cos(2\pi w x)}{a} + \frac{2\pi w}{a^2} e^{-ax}\sin(2\pi w x)$$

$$\begin{cases} \left|e^{-ax}\cos(2\pi w x)\right| \leq e^{-ax} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\cos(2\pi w x) = 0 \\ e^{-ax}\sin(2\pi w x) \leq e^{-ax} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\sin(2\pi w x) \to \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Donc $\lim_{x\to+\infty} I_x = \frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{a^2+(2\pi w)^2} = \frac{a}{a^2+(2\pi w)^2}$.

ce qui prouve que : $\hat{f}(w) = \frac{2a}{a^2+(2\pi w)^2}$ (d'après ⊛)

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(wx)}{x^2+4\pi^2}\,dx \quad (w\in\mathbb{R})$

- f satisfait les conditions de La transformée inverse :

$\begin{cases} \cdot f\in L^1(\mathbb{R}) \\ \cdot \hat{f} \text{ est loc}^{\text{te}} \text{ intg} \quad (\text{elle est continue sur } \mathbb{R}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)\,dw = 2\int_0^{+\infty}\frac{2a}{a^2+(2\pi w)^2}\,dw < \infty \end{cases}$

et f continue sur $\mathbb{R}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\, e^{2i\pi wt}\,dw = f(t)$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a}{a^2+(2\pi w)^2}\left(\cos(2\pi wt)+i\sin(2\pi wt)\right)dt = e^{-a|t|}$

Pour $a = 2\pi$, on obtient :

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\pi}{(2\pi)^2+4\pi^2w^2}\cos(2\pi wt)\,dw = e^{-2\pi|t|}$ (de terme qui contient $\sin(\cdot)$ est nul.)

$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi wt)}{1+w^2}\,dw = e^{-2\pi|t|}$

Comme $w\longmapsto \frac{\cos(2\pi wt)}{1+w^2}$ est paire, alors

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2\pi wt)}{1+w^2}\,dw = e^{-2\pi|t|}$.

Scanned with CamScanner

Avec le changement de variable $x = 2\pi w$; $dx = 2\pi\, dw$

on obtient : $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+\frac{x^2}{(2\pi)^2}} \frac{dx}{2\pi} = e^{-2\pi|t|}$

$$\Rightarrow 4\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{4\pi^2+x^2}\, dx = e^{-2\pi|t|}$$

En fin $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(wx)}{x^2+4\pi^2}\, dx = \frac{1}{4} e^{-2\pi|w|}$.

3) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Pour $a = 2\pi$. on a : $\hat{f}(w) = \frac{4\pi}{4\pi^2+4\pi^2w^2} = \frac{1}{\pi(1+w^2)}$. (**)

D'après La transformée inverse $(f, \hat{f} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}))$

on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\, e^{2i\pi wt}\, dw = f(t)$

- $x = -w \Rightarrow \int_{+\infty}^{-\infty} -\hat{f}(-x)\, e^{-2i\pi xt}\, dx = f(t)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(+x)\, e^{-2i\pi xt}\, dx = f(t) \qquad (\hat{f} \text{ est paire})$$

(**) $\Rightarrow g(x) = \pi \hat{f}(x)$, donc sa transformée de Fourier est :

$$\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-2i\pi wt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \hat{f}(t)\, e^{-2i\pi wt}\, dt = \pi f(w)$$

$$\boxed{\hat{g}(w) = \pi e^{-2\pi|w|}}$$

Scanned with CamScanner

4) Calcul de $f*f$

$$f*f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, f(t)\, dt.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-t|}\, e^{-a|t|}\, dt$$

Remarque

f est paire $\Rightarrow$ $f*f$ l'est aussi

en effet:

$$f*f(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x-t)\, f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\, f(t)\, dt$$

$t' = -t$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} -f(x-t')\, f(-t')\, dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, f(t)\, dt$$

$$= f*f(x)$$

Soit, donc $x \in]0, +\infty[$

$$f*f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-t|}\, e^{-a|t|}\, dt.$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(|x+t|+|t|)}\, dt + \int_{0}^{x} e^{-a(|x-t|+|t|)}\, dt + \int_{x}^{+\infty} e^{-a(|x-t|+|t|)}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-2t)}\, dt + \int_{0}^{x} e^{-ax}\, dt + \int_{x}^{+\infty} e^{-a(2t-x)}\, dt$$

Scanned with CamScanner

$$f*f(x) = e^{-ax}\int_{-\infty}^{0} e^{2at}\,dt + xe^{-ax} + e^{ax}\int_{x}^{+\infty} e^{-2at}\,dt$$

$$= e^{-ax}\left[\frac{e^{2at}}{2a}\right]_{R\to-\infty}^{0} + xe^{-ax} + e^{ax}\left[\frac{1}{-2a}e^{-2at}\right]_{x}^{R\to+\infty}$$

$$= \frac{e^{-ax}}{2a} + xe^{-ax} + e^{ax}\frac{e^{-2ax}}{2a}.$$

$$= e^{-ax}\left(x+\frac{1}{a}\right)$$

- Pour $x \in]-\infty, 0[\Rightarrow -x > 0$

$f*f$ est paire

$$f*f(x) = f*f(-x)$$

$$= e^{ax}\left(-x+\frac{1}{a}\right)$$

- Pour $x = 0$ $\quad f*f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2\,dt = \frac{1}{a}$.

Conclusion

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f*f(x) = e^{-a|x|}\left(|x|+\frac{1}{a}\right)}$$

- En déduire la T.F de $h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

On sait que $\mathcal{F}(f*f)(w) = \hat{f}(w)\,\hat{f}(w)$.

Pour $a = 2\pi$, $\quad \hat{f}(w) = \frac{1}{\pi(1+w^2)}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(f*f)(w) = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(1+w^2)^2} = \frac{1}{\pi^2}h(w)$$

toutes ces fonctions sont absolument intégrable, on peut donc appliquer la transformée inverse (conjug.)

Scanned with CamScanner

$$\hat{h}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 \mathcal{F}(f*f)(t)\, e^{-2i\pi wt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\mathcal{F}(f*f)(t)\, e^{2i\pi wt}\, dt \quad \text{car } f*f \text{ est paire}$$

$$= \pi^2 (f*f)(w)$$

$$= \pi^2 \, e^{-2\pi|w|}\left(|w| + \frac{1}{2\pi}\right)$$

5°) La t. de Fourier de $K(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Remarquons que : $g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -2K(x)$

et on sait que : $\mathcal{F}(g')(w) = 2i\pi w\, \mathcal{F}(g)(w)$

$$\Rightarrow \hat{K}(w) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}(g')(w)$$

$$= -\frac{1}{2} 2i\pi w\, \hat{g}(w)$$

$$= -i\pi w\, \pi\, e^{-2\pi|w|}$$

$$\boxed{\hat{K}(w) = -i\pi^2 w\, e^{-2\pi|w|}}$$

6) $a = 1$

y solution de (1) $\quad y(t) = e^{-|t|} + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|}\, y(x)\, dx \quad \alpha > 0$

(a). on sait que : $f*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\, y(x)\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|}\, y(x)\, dx$$

donc (1) $\Rightarrow \quad y(t) = e^{-|t|} + \alpha\, f*y(t)$.

Scanned with CamScanner

(b) Supposons qu'il existe une fonction intégrable y tque: (E): $y(t) = e^{-|t|} + \alpha f * y(t)$

En appliquant la transformée de Fourier à (E), on obtient:

$$\hat{y} = \hat{f} + \alpha \hat{f}\cdot\hat{y}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(1-\alpha\hat{f}) = \hat{f}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \frac{\hat{f}}{1-\alpha\hat{f}}$$

(Si $1-\alpha\hat{f}=0 \Rightarrow \hat{f}=0$ absurde)

($\alpha=1$)

on sait que $\hat{f}(w) = \frac{2}{1+(2\pi w)^2}$.

$$\Rightarrow \hat{y}(w) = \frac{2}{1-2\alpha+(2\pi w)^2},$$ définie si $\alpha \in]0, 1/2[$

Car sinon $\alpha \geq 1/2 \Rightarrow 1-2\alpha < 0$ ($1-2\alpha+(2\pi w)^2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ La fonction $\hat{y}(w)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, absurde.

D'où $\alpha \in]0, 1/2[$

(c) Réciproquement, supposons que $\alpha \in]0, 1/2[$

on considère $\hat{y}(w) = \frac{2}{1-2\alpha+(2\pi w)^2}$ et posons $a = \sqrt{1-2\alpha}$

$$\Rightarrow \hat{y}(w) = \frac{2}{a^2+(2\pi w)^2} = \frac{1}{a}\,\frac{2a}{a^2+(2\pi w)^2} = \frac{1}{a}\,\hat{f}_a(w)$$

(où $f_a(t) = e^{-a|t|}$ voir question 1/

l'injectivité de la T. de Fourier: $\boxed{y(t) = \frac{1}{a} f_a(t)} = \frac{1}{a} e^{-a|t|}$

Scanned with CamScanner

D'autre part : $\mathcal{F}(f + \alpha f * y) = \hat{f} + \alpha \hat{f}.\hat{y}$ avec $\hat{f}(w) = \frac{2}{1+(2\pi w)^2}$

$$= \hat{f}(1 + \alpha \hat{y})$$

$$= \frac{2}{1+(2\pi w)^2}\left(1 + \frac{2\alpha}{a^2+(2\pi w)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{1+(2\pi w)^2}\left(\frac{a^2 + (2\pi w)^2 + 2\alpha}{a^2 + (2\pi w)^2}\right) \quad \text{et } a = \sqrt{1-2\alpha}$$

$$= \frac{2}{a^2+(2\pi w)^2} = \hat{y}(w)$$

$\Rightarrow f + \alpha f * y = y$

c.à.d y est solution de (1)

- l'unicité de la solution de l'équation (1) est assurée par l'injectivité de la transformée de Fourier.

Scanned with CamScanner

Série de T.D. $N4$
Fonctions Complexes

Exercice 0.1 *Vérifier les relations suivantes*

1. $\cos^2(z)+\sin^2(z)=1$; $\cos(2z)=\cos^2(z)-\sin^2(z)$ *pour tout* $z\in\mathbb{C}$.
2. *Montrer que pour tout* $z=x+iy\in\mathbb{C}$: $\cos(z)=\cos(x)ch(y)-i\sin(x)sh(y)$ *et que* $\sin(z)=\sin(x)ch(y)+i\cos(x)sh(y)$
3. *En déduire que les fonction* $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *ne sont pas bornées dans* $\mathbb{C}$.
4. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :* $\sin(z)=4$.

Exercice 0.2 1. *Soit* f *une fonction de variable complexe* $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ *définie par* $f(z)=\sin(x)ch(y)+i\cos(x)sh(y)$.
montrer que f *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$, *puis donner sa dérivée en fonction de* z.

2. *Soit* g *une fonction de variable complexe* $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ *définie par* $g(z)=x+ay+i(bx+cy)$. *Déterminer les réels* a,b,c *pour que* g *soit holomorphe dans* $\mathbb{C}$.
3. *Les fonctions suivantes sont elles holomorphes :*
(a) $f(x+iy)=x^2y^3+ixy^2$ (b) $g(x+iy)=\cos^2(x-y)+i\sin^2(x-y)$ (c) $f(x+iy)=x+iy^2$

Exercice 0.3 *On considère la fonction* f *définie par :* $f(z)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{z^4}} & si\ z\neq 0 \\ 0 & si\ z=0 \end{cases}$

1. *Soit* $z=x+iy\neq 0$.
   (a) *Déterminer deux fonctions* g,h *telle que* $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ *où* $P(x,y)=e^{g(x,y)}\cos(h(x,y))$ *et* $Q(x,y)=e^{g(x,y)}\sin(h(x,y))$.
   (b) *Montrer que* f *vérifie les conditions de C.Riemann en* $z_0=0$..
2. *Montrer que* f *n'est dérivable en* $z_0=0$ *(au sens complexe).*

Exercice 0.4 *on considère la fonction* P *définie par :* $P(x,y)=2x^3-6xy^2+x^2-y^2$.

1. *Montrer que* P *est harmonique sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Trouver toutes les fonctions* f *holomorphes sur* $\mathbb{C}$ *telle que* $Re(f(z))=P(x,y)$ $(z=x+iy)$.
3. *Calculer* $f'(z)$ *en fonction de* x *et* y.

Exercice 0.5 *On considère la fonction* $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *une fonction telle que* $f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y)$. *Déterminer* Q *pour que* f *soit holomorphe sur* $\mathbb{C}$, *dans les cas suivants :*
(1) $P(x,y)=2xy$ (2) $P(x,y)=x^2-y^2+e^{-y}\sin(x)$

Exercice 0.6 *Soit* $f:D\to\mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur un ouvert* D. *on pose* $V=\{z\in\mathbb{C}/\overline{z}\in D\}$. *Pour tout* $z\in V$ *on pose* $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$.
Montrer que g *est holomorphe sur* V

Exercice 0.7 *Soit* $f:D\to\mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur un ouvert connexe* D. *On pose* $f=P+iQ$.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) f *est constante* $\iff$ (2) P *est constante* $\iff$ (3) Q *est constante* $\iff$ (4) $\overline{f}$ *est holomorphe.*

Scanned with CamScanner

Exercice 0.8 *on considère la fonction P définie par : $P(x,y) = x + \dfrac{x}{x^2+y^2}$.*

1. *Démontrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f définie sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ dont la partie réelle est P et telle que $f(1) = 2$.*
2. *Donner l'expression de $f(z)$ en fonction de z pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.*

Exercice 0.9 (1) *Paramétrer les chemins suivants :*

1. *(C_1) le demi-cercle de centre $z_0 = i$ et rayon $R = 1$*
2. *(C_2) le segment z_1, z_2 où $z_1 = 2+i$ et $z_1 = 3+5i$.*

(2) *Représenter les chemin suivants en précisant s'ils sont simples ou non :*

1. *$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = 2e^{i\pi t}$.*
2. *$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = t + it$.*
3. *$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = t^2 + it^2$.*

Exercice 0.10 *Soit (C) le demi-cercle de diamètre le segment $[-3,3] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer :*
$\int_C Re(z)dz \quad \int_C e^z dz$

comparer ce dernier résultat à $\int_{-3}^{3} e^z dz$

Exercice 0.11 (1) *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω.*
Montrer que pour tous points A et B de Ω, l'intégrale $\int_{A\to B} f(z)dz$ ne dépend pas du chemin joignant A et B.

Exercice 0.12 *Soit g la fonction complexe définie par $g(z) = |z|^2$*
Calculer $\int_\Gamma g(z)dz$ où Γ est le carré $OABC$ où $O(0)$, $A(1)$, $B(1+i)$ et $C(i)$.

Exercice 0.13 *Soit f la fonction complexe définie par $g(z) = \sin(nz)$, $n \in \mathbf{Z}$.*
Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ où γ est le chemin paramétré par $\gamma : [0, \dfrac{1}{2}] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ par deux méthodes différentes(th de Cauchy - primitive).

Exercice 0.14 *On considère la fonction P définie par : $P(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$.*

1. *Montrer que P est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telle que $Re(f(z)) = P(x,y)$ $(z = x+iy)$ et $f(2) = 0$.*
3. *Calculer $f'(z)$ en fonction de x et y.*
4. *Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ et $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-2}dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon $R = 2$ orienté dans le sens directe.*

Exercice 0.15 *On considère la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$, et le chemin fermé γ définie par le segment $[-R,R]$ et le demi cercle de centre situé dans le demi-plan supérieur de diamètre $[-R,R]$ avec $R > 1$. (le contour est parcouru une seule fois dans le sens direct).*

1. *Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$.*

Exercice 0.16 *On considère la fonction $f(z) = e^{z^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, et le chemin fermé γ_R le rectangle de sommets $-R$, R, $R + i\dfrac{t}{2}$ et $-R + i\dfrac{t}{2}$.*

Scanned with CamScanner

1. *Calculer* $\int_{\gamma_R} f(z)dz$.
2. *Montrer que* $\lim_{R\to+\infty} \int_R R + i\frac{t}{2} f(z)dz = 0$ *et que* $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R} -R + i\frac{t}{2} f(z)dz = 0$.
3. *En déduire la valeur de* $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R+i\frac{t}{2}} +R + i\frac{t}{2} f(z)dz = 0$.
4. *Retrouver la Transformée de Fourier de la fonction gaussienne* $x \mapsto e^{-x^2}$.

Scanned with CamScanner

Série 4

Exercice 01

1) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2(z) = \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + e^{-2iz} + 2\right) \\ \sin^2(z) = \frac{-1}{4}\left(e^{2iz} + e^{-2iz} - 2\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

2) $z = x + iy$. • Mque: $\cos(x+iy) = \cos(x)\operatorname{ch}y - i\sin(x)\operatorname{sh}(y)$

En effet: $\cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\cdot\sin(iy)$

et $\begin{cases} \cos(iy) = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \operatorname{ch}(y) \\ \sin(iy) = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\operatorname{sh}(y) \end{cases}$

Donc $\cos(x+iy) = \cos(x).\operatorname{ch}(y) - i\sin(x)\operatorname{sh}(y)$

• $\sin(x+iy) = \sin(x)\operatorname{sh}(y) - i\cos(x).\operatorname{ch}(y)$

Même chose

$$\begin{aligned} \sin(x+iy) &= \sin(x).\cos(iy) + \cos(x).\sin(iy) \\ &= \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x).\operatorname{sh}(y) \end{aligned}$$

3) Mque $z \mapsto \cos(z)$ n'est pas bornée dans $\mathbb{C}$

$\cos(z) = \cos(x+iy) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin(x).\operatorname{sh}(y)$

$\Rightarrow |\cos(z)|^2 = \cos^2x.\operatorname{ch}^2(y) + \sin^2(x).\operatorname{sh}^2(y)$

D'autre part: $\operatorname{ch}^2y - \operatorname{sh}^2(y) = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \operatorname{ch}^2(y) = 1 + \operatorname{sh}^2(y)$

Donc $|\cos z|^2 = \cos^2x.(1 + \operatorname{sh}^2(y)) + \sin^2(x).\operatorname{sh}^2(y)$

$|\cos(z)|^2 = \cos^2x + \operatorname{sh}^2(y)$

$|\cos(z)|^2 \geq \operatorname{sh}^2(y)$

Scanned with CamScanner

Donc $|\cos(z)| \geq |\sh(y)|$

or $\sh(y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{y \to +\infty} \sh(y) = +\infty \\ \lim\limits_{y \to -\infty} \sh(y) = -\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ la fonction $y \longmapsto \sh(y)$ n'est pas bornée dans $\mathbb{R}$

Donc La fonction $z \longmapsto \cos(z)$ ne peut pas être bornée dans $\mathbb{C}$.

(Car sinon $\exists M$. $\forall z \in \mathbb{C}$: $|\cos(z)| \leq M$

$\Rightarrow \forall y \quad |\sh y| \leq M$ absurde)

- Pour $z \longmapsto \sin(z)$

même démarche

Remarque

les fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont bornées dans $\mathbb{R}$

Mais $z \longmapsto \cos z$ et $z \longmapsto \sin(z)$ ne sont pas bornées dans $\mathbb{C}$.

---

4) Pour l'equation $\sin z = 4$

- utiliser le fait que $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\sin z = 4 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 8i$

$\Leftrightarrow$ ⋮

Scanned with CamScanner

• $z \longmapsto \sin(z)$ n'est pas bornée

Soit $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = x + iy$

on a $\sin(z) = \sin x \cdot \operatorname{ch}(y) + i \cos x \cdot \operatorname{sh}(y)$.

et $\operatorname{ch}^2(y) = 1 + \operatorname{sh}^2(y)$.

$$\Rightarrow |\sin(z)|^2 = \sin^2 x \cdot \operatorname{ch}^2(y) + \cos^2 x \cdot \operatorname{sh}^2(y)$$

$$= \sin^2 x (1 + \operatorname{sh}^2(y)) + \cos^2 x \cdot \operatorname{sh}^2(y)$$

$$= \sin^2 x + \sin^2 x \cdot \operatorname{sh}^2(y) + \cos^2 x \cdot \operatorname{sh}^2(y)$$

$$= \sin^2 x \cdot + \operatorname{sh}^2(y)$$

$$|\sin(z)|^2 \geq \operatorname{sh}^2(y)$$

$$\Rightarrow |\sin(z)| \geq |\operatorname{sh}(y)|$$

↑ n'est pas bornée .....

Donc $z \mapsto \sin z$ n'est pas bornée dans $\mathbb{C}$

Scanned with CamScanner

• L'equation $\sin z = 4$

$\sin z = 4 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 4$

$\Leftrightarrow e^{2iz} - 8ie^{iz} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow u^2 - 8iu - 1 = 0$ avec $u = e^{iz}$.

$\Delta = -60 \quad ((2\sqrt{15}i)^2)$

$\Rightarrow u = (4 - \sqrt{15})i$ ou $u = (4+\sqrt{15})i$

$\Rightarrow e^{iz} = (4+\sqrt{15})i = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{\ln(4+\sqrt{15})} = e^{i\frac{\pi}{2} + \ln(4+\sqrt{15})}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow iz = i\frac{\pi}{2} + \ln(4+\sqrt{15}) + 2ik\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(4+\sqrt{15}) \quad k \in \mathbb{Z}$

$e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2ik\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$e^{iz} = (4-\sqrt{15})i = e^{i\frac{\pi}{2} + \ln(4-\sqrt{15})}$

$\Rightarrow iz = i\frac{\pi}{2} + \ln(4-\sqrt{15}) + 2ik\pi$

$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(4-\sqrt{15}) \quad : k \in \mathbb{Z}$

Conclusion

$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(4-\sqrt{15}) \; ; \; \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(4+\sqrt{15}) \right.$

$\left. / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Scanned with CamScanner

Exercice 02

1) $f(x+iy) = \sin(x).\operatorname{ch}(y) + i\cos(x).\operatorname{sh}(y)$

Posons $\begin{cases} P(x,y) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) \\ Q(x,y) = \cos(x).\operatorname{sh}(y) \end{cases}$

Soit $z = x+iy$

$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \cos(x).\operatorname{ch}(y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\operatorname{sh}(y). \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\sin x.\operatorname{sh}(y) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \cos(x).\cos(y) \end{cases}$

$\Rightarrow$ les dérivées partielles existent et sont continues

$\Leftrightarrow$ f est différentiable)

Reste à vérifier les C.C.R.

en effet : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$

Donc f est dérivable en (x,y) donc dérivable dans $\mathbb{C}$.

Conclu f est holomorphe sur $\mathbb{C}$

et on a : Pour tout $z = x+iy$:

$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

$= \cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin x.\operatorname{sh}(y)$

$$\boxed{f'(z) = (\sin z)' = \cos(z)}$$

Scanned with CamScanner

2) $g(z=x+iy) = x+ay + i(bx+cy)$

f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ f est diff et satisfait les C.C.R en tout $z=x+iy$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \quad (*)$$

avec $\begin{cases} P(x,y) = x+ay \\ Q(x,y) = bx+cy \end{cases}$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 1 = c \\ a = -b \end{cases}$$

Donc $g(z) = x+ay + i(-ax+1)$

3) a) $f(z) = f(x+iy) = x^2y^3 + ixy^2$

$= P(x,y) + iQ(x,y)$

$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

les fonctions P et Q sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

(les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$)

Donc f est différentiable

Reste à vérifier si P et Q satisfont les conditions de C.R.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = y^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 2xy \end{cases}$$

C.C.R. $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^3 = 2xy \\ 3x^2y^2 = -y^2 \end{cases} (*)$

Scanned with CamScanner

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy(y^2-1)=0 \\ y^2(3x^2+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x+iy) \in \{(x,0) / x\in\mathbb{R}\}$.

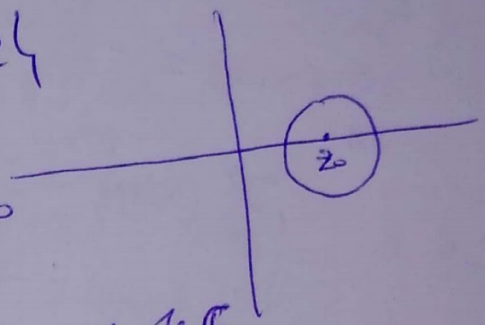
Inversement, $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,0)=0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,0)=0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,0)=0 \end{cases}$

Donc les C.C.R sont satisfaites pour $z=x+iy$ $x\in\mathbb{R}, y=0$
$z=x$

$\Rightarrow f$ est dérivable en tout point $z=x$ où $x\in\mathbb{R}$.

Est-ce que f est holomorphe en $z_0=x_0 \in D$

Posons où $D=\{z\in\mathbb{C} / z=x+i0 \ ; x\in\mathbb{R}\}$
(= c'est la droite réelle.)



Comme $\forall z\in D$, il n'existe aucun $r>0$
tq $D(z,r)$ CA

Donc f n'est pas holomorphe en aucun pt de $\mathbb{C}$.
(D est d'intérieur vide $\mathring{D}=\emptyset$)

Rappel

f est holomorphe en $z_0 \Leftrightarrow \exists r>0$ tq f est dérivable en tout pt du disque $D(z_0,r)$

Scanned with CamScanner

(b) $g(x+iy) = \cos^2(x-y) + i\sin^2(x-y)$
$= P(x,y) + iQ(x,y)$

- les dérivées partielles existent et sont continues dans $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow$ g est différentiable en tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$.
- Reste à vérifier si P et Q satisfont les C.C.R.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = -2\cos(x-y)\sin(x-y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = +2\cos(x-y)\sin(x-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2\sin(x-y)\cos(x-y) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -2\sin(x-y)\cos(x-y) \end{cases}$$

C.C.R. $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \leftarrow \text{est vérifié pour tout } (x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \quad (*) \end{cases}$

$(*) \Rightarrow 2\cos(x-y)\sin(x-y) = -2\cos(x-y)\sin(x-y)$

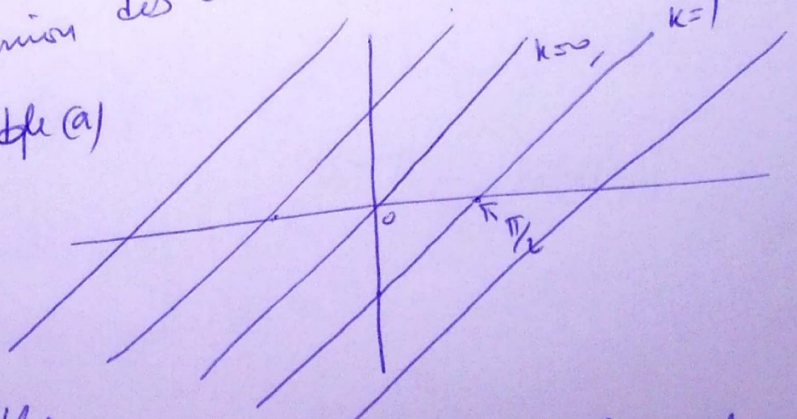
$\Rightarrow \sin(2x-2y) = 0$

$\Rightarrow 2x-2y = k\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y = x - \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

on pose $A = \{ z = (x+iy) \;/\; y = x - \frac{k\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z} \}$

$=$ la réunion des droite $D_k : y = x - \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$



- la même remarque que (a) en chaque pt de A on peut trouver un disque dans lequel g est dérivable

conclusion g n'est pas holomorphe.

Scanned with CamScanner

Exercice 03

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

1) Soit $z = x + iy \neq 0$.

(a) $f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$.

$z = x+iy$

$$\frac{1}{z^4} = \frac{\bar{z}^4}{(z\bar{z})^4} = \frac{(x-iy)^4}{(|z|^2)^4} = \frac{(x-iy)^4}{(x^2+y^2)^4}.$$

Rappel $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$\Rightarrow (x-iy)^4 = x^4 - 4ix^3y - 6x^2y^2 + 4xy^3 i + y^4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^4} = \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^4} + i\,\frac{-4x^3y + 4xy^3}{(x^2+y^2)^4}.$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{z^4} = -\frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^4} - i\,\frac{4xy^3 - 4x^3y}{(x^2+y^2)^4}.$$

$$-\frac{1}{z^4} = g(x,y) + i\,h(x,y)$$

où $\begin{cases} g(x,y) = -\dfrac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^4} \\ h(x,y) = -\dfrac{4xy^3 - 4x^3y}{(x^2+y^2)^4}. \end{cases}$

$$\Rightarrow f(z) = e^{g(x,y) + i\,h(x,y)}$$

$$= e^{g(x,y)} \cos(h(x,y)) + i\, e^{g(x,y)} \cdot \sin(h(x,y))$$

$$= e^{g(x,y)} \cdot \cos(h(x,y)) + i\, e^{g(x,y)} \sin(h(x,y))$$

$$= P(x,y) + i\,Q(x,y)$$

Scanned with CamScanner

b) Mque f vérifie les C.C.R. en $z_0 = 0$

ona : $f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$

- $f(0,0) = 0 \Rightarrow P(0,0) = Q(0,0) = 0$

- $\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{P(0+t,0) - P(0,0)}{t}$ (20/42)

$$\begin{cases} g(t,0) = \dfrac{-t^4}{t^8} = \dfrac{-1}{t^4} \\ h(t,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow P(t,0) = e^{-1/t^4}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^4}}}{t} = 0$$

- $\dfrac{\partial Q}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{Q(0,0+y) - Q(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{Q(0,y) - 0}{y}$

$$\begin{cases} g(0,y) = 0 \\ h(0,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0,y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Donc $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(0,0)}$

- D'autre part :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{P(0,y) - P(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{y^4}}}{y} = 0$$

Car $\begin{cases} g(0,y) = \dfrac{-y^4}{y^8} = -1/y^4 \\ h(0,0) = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{Q(x,0) - Q(0,0)}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)}$$

Ce qui montre que P et Q satisfont les conditions de C.R

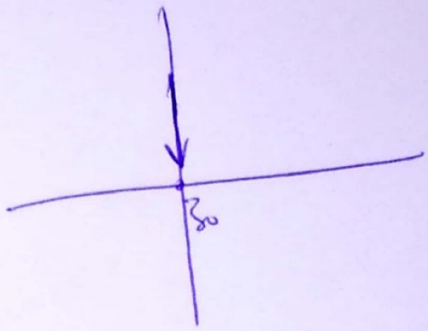
Scanned with CamScanner

2) Mque f n'est pas dérivable en $z_0 = 0$.

f est dérivable en $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$.

la limite doit être indépendante de la façon dont $z \to z_0$

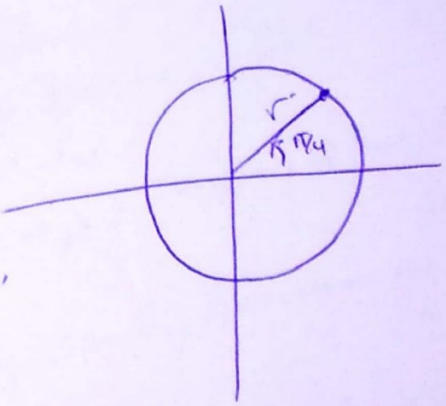
il suffit donc de montrer que $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet deux limites différentes lorsque $z \to z_0$ suivant deux chemins distincts.



• Suivant le chemin iy $y \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{t \to 0} \frac{f(it) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^4}}}{t} = 0$$



• D'autre part, $z = re^{i\pi/4} \xrightarrow[r \to 0]{} 0$

$(z \to 0 \Leftrightarrow r \to 0)$

$$\lim_{r \to 0} \frac{f(re^{i\pi/4})}{re^{i\pi/4}} = \lim_{r \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{(re^{i\pi/4})^4}}}{re^{i\pi/4}}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{e^{\frac{1}{r^4}}}{\frac{1}{e^{i\pi/4}} r} = \infty.$$

Donc f n'est pas dérivable en $z_0 = 0$

Scanned with CamScanner

Exercice 4 $P(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2$

1) P est harmonique sur $\mathbb{R}^2$

- P est de classe C^2 : les dérivées partielles existent et sont continues) de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 6y^2 + 2x$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 12x + 2$

$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -12xy - 2y$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -12x - 2$

donc $\Delta P(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ P est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

2) P est harmonique sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ P est localement la partie réelle d'une fonction $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe c-à-d $\exists\, Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tq : $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est holomorphe.

$\Rightarrow f$ satisfait les conditions de Cauchy Riemann en (x,y) tout c-à-d $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 6x^2 - 6y^2 + 2x \quad (1) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = +12xy + 2y \quad (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow Q(x,y) = 6x^2y + 2xy + c(y)$

(1) $\Rightarrow 6x^2 - 6y^2 + 2x = 6x^2 + 2x + c'(y)$

$\Rightarrow c'(y) = -6y^2 \Rightarrow c(y) = -2y^3 + \alpha$ /2EQR

$\Rightarrow \boxed{Q(x,y) = 6x^2y + 2xy - 2y^3 + \alpha}$ /2EQR

Scanned with CamScanner

D'où $f(x,y) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$

où $\begin{cases} P(x,y) = \\ Q(x,y) = \end{cases}$

3) $f'(z) = ?$

f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et on a: pour tout $z = x+iy$

$f(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

$= (6x^2 - 6y^2 + 2x) + i\,(+12xy + 2y)$

Scanned with CamScanner

Exercice 06

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe sur D

$(f = P + iQ)$ $V = \{ z \in \mathbb{C} / \bar{z} \in D \}$

$$g : V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

Mque g est holomorphe sur V :

Soit $z \in V$.

Pour $z = x + iy$ on a : et $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

$$g(x+iy) = \overline{f(x-iy)}$$
$$= P(x,-y) - iQ(x,-y)$$
$$= U(x,y) + iV(x,y)$$

$$\begin{cases} U(x,y) = P(x,-y) \\ V(x,y) = -Q(x,-y) \end{cases}$$

f est holomorphe sur $D \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent et sont

$\Rightarrow$ les dérivées partielles de U et V existent et sont continues

$\Rightarrow$ g est différentiable (Cal-diff)

Reste à vérifier si U et V satisfont les C.C.R.

en effet :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,-y)$$

et $\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = -\left(-\frac{\partial Q}{\partial y}(x,-y)\right) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)}$$

De la même façon on montre que $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)$

ce qui prouve que g est holomorphe sur V.

Scanned with CamScanner

Exercice 7

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe sur D.

$f = P + iQ$.

1) $\Rightarrow$ 2) évident

1) $\Rightarrow$ 3) évident.

2) $\Rightarrow$ 1)

Supposons que $f = P + iQ$ et $P = cte$

f est holomorphe $\Rightarrow \forall z = (x+iy)$ $\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow Q(x,y) = cte$

$\Rightarrow f =$ est constante

(2) $\Rightarrow$ (3) évident par les C.C.R.

1) $\Rightarrow$ 4) évident. ($f = cte \Rightarrow \bar{f} = cte \Rightarrow \bar{f}$ est holomorphe)

4) $\Rightarrow$ 1) Supposons $\bar{f}$ est ~~constante~~ holomorphe

et on a f holomorphe

donc $P = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ est holomorphe.

ou $P = P + i0$ holomorphe $\Rightarrow Im(P) = cte$

$\begin{cases} P \text{ holomorphe} \\ Im(P) = cte \end{cases} \overset{2)\Rightarrow 3)}{\Longrightarrow} Re(P) = P$ est constante.

$\Rightarrow f = cte$

Conclusion

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)

Scanned with CamScanner

Série N°4

Exo8 $P(x,y) = x + \dfrac{x}{x^2+y^2}$ soit $(x,y) \neq (0,0)$

- P est harmonique :
  - P est de classe C^2 (evident)

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 1 + \frac{(x^2+y^2) - x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 2.2x(x^2+y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 + 2xy.4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{-4x(x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2)\left[8xy^2 - 4x(y^2-x^2)\right]}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-4x(x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2)(4xy^2+4x^3)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\left[-4x(x^2+y^2) + 4xy^2 + 4x^3\right)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= 0$$

Donc P est harmonique.

Scanned with CamScanner

• P est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ P est la partie réelle d'une fct holomorphe f sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Càd $\exists\, Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq : $f = P + iQ$.

f est holomorphe $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & (1) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & (2) \end{cases}$$

En intégrant l'équation (1) suivant la variable x (y fixe)

on obtient $Q(x,y) = \int y \frac{(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}\, dx$ $\qquad \left(\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}\right)$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2} + c(y)$$

Pour déterminer y, on utilise (2)

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(y)$$

(2) $\Rightarrow$ $c'(y) = 1$

$\Rightarrow$ $c(y) = y + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Donc $f(z = x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

$$= \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + y + \alpha\right)$$

Comme $f(1) = 2$ $\Rightarrow$ $2 + i\alpha = 2$

$\Rightarrow$ $\alpha = 0$

$$\Rightarrow f(z = x+iy) = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + y\right)$$

$$= x + iy + \frac{x - iy}{x^2+y^2} = z + \frac{\overline{z}}{|z|^2} \cdot \text{ pour } z \neq 0$$

$= z + \frac{1}{\overline{z}}$

Scanned with CamScanner

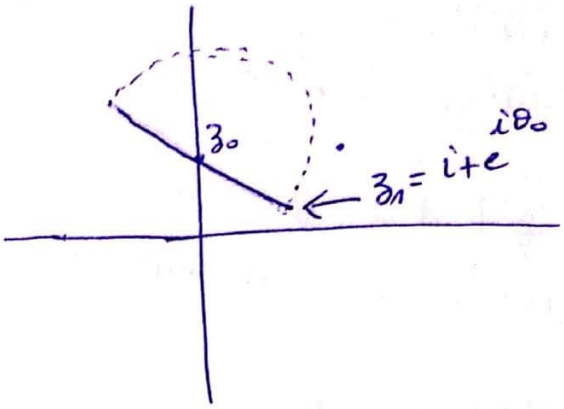
Exercice 09

1) (C_1) : demi-cercle de centre $z_0 = i$ et de rayon $R = 1$

$\gamma : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma(t) = i + e^{i(\theta_0 + t)}$

où θ_0 fixé



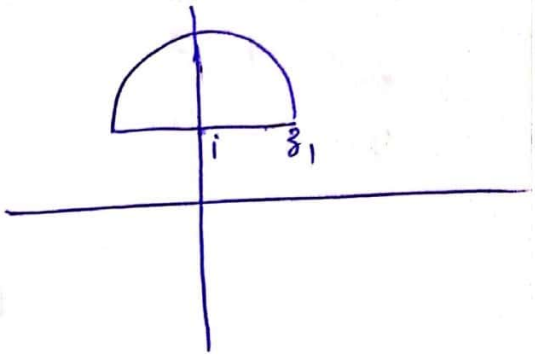
Cas particulier : Pour $\theta_0 = 0$.

on a $z_1 = i + 1$.

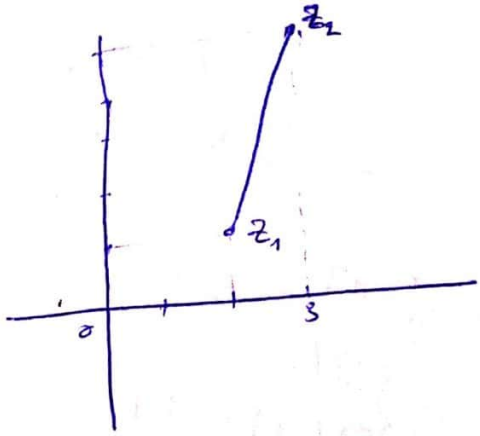
et le demi-cercle est paramétré par :

$\gamma : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = i + e^{it}$



2) (C_2) le segment $[z_1 z_2]$



$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = (1-t) z_1 + t z_2$

$= 2 + i + (1+4i)t$

$= 2 + t + i(1+4t)$

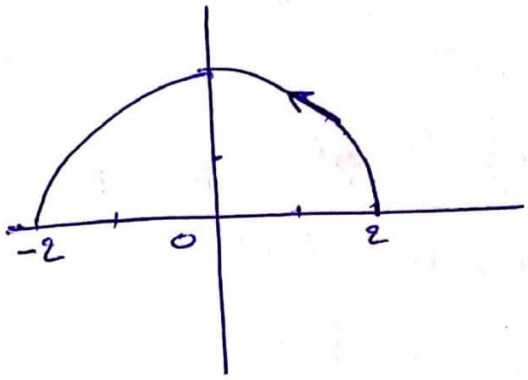
Scanned with CamScanner

2) Représentation des chemins.

① $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = 2e^{i\pi t}$

$\begin{cases} \gamma(0) = 2 \\ \gamma(1) = 2e^{i\pi} = -2 \end{cases}$



il s'agit d'un demi cercle de centre 0 et de rayon 2.

- γ est simple ?

Soient $t_1, t_2 \in [0,1[$

$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow e^{i\pi t_1} = e^{i\pi t_2}$

$\Rightarrow i\pi t_1 = i\pi t_2 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow t_1 - t_2 = 2k$

$\Rightarrow t_1 + t_2 \in [0,1[$

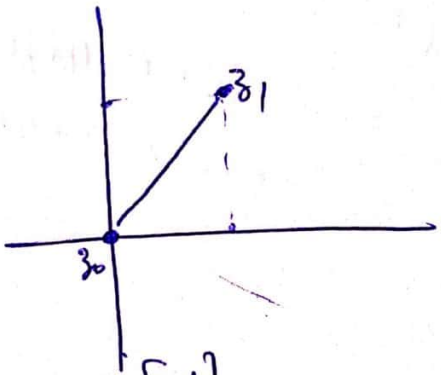
Comme $t_1, t_2 \in [0,1[\Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow t_1 = t_2 \Rightarrow \gamma$ est injective $[0,1[$

$\Rightarrow \gamma$ est un chemin simple.

② $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \quad : \gamma(t) = t + it$

$\begin{cases} \gamma(0) = 0 \\ \gamma(1) = 1 + i \end{cases}$



$\gamma(t) = t + it$

$= (1-t)0 + t(1+i)$

$= (1-t)z_0 + tz_1$

$\Rightarrow \gamma$ est la paramétrisation du segment $[0A]$ où $A(z_1)$

Scanned with CamScanner

γ est simple ?

Soient $t_1, t_2 \in [0,1[$.

$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 + it_1 = t_2 + it_2$

$\Rightarrow t_1 = t_2$

$\Rightarrow \gamma_{/[0,1[}$ est injective

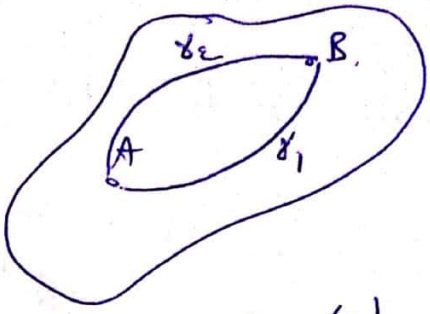
ce qui montre que γ est un chemin simple.

Scanned with CamScanner

Exercice N

Ω un ouvert simplement connexe

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe



Soient γ_1 et γ_2 deux chemins joignant A et B.

$\Rightarrow \gamma_1 * \gamma_2^{op}$ est un Lacet (chemin fermé simple)

d'après théorème de Cauchy (

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2^{op}} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^{op}} f(z)\,dz = 0$$

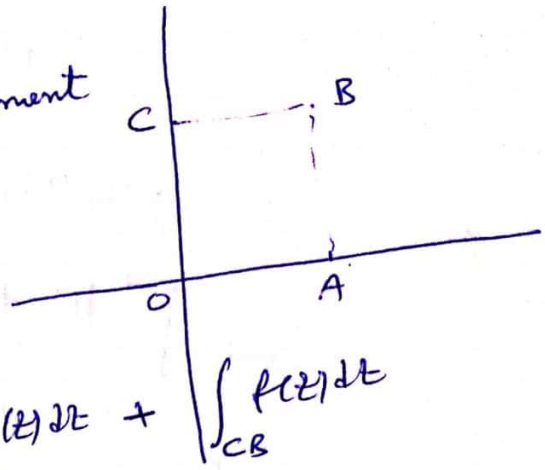
$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

C.à.d l'integrale $\int_{A \to B} f(z)\,dz$ ne dépend pas du chemin joignant A et B.

Scanned with CamScanner

Exercice 12

(Γ) est le carré orienté positivement



$$\int_\Gamma g(z)\,dz = \int_{OA} g(z)dz + \int_{AB} g(z)dz + \int_{BC} g(z)dz + \int_{CB} f(z)dz$$

- OA est un segment paramétré par : $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$
  $\gamma_1(t) = t$

Donc $\int_{OA} g(z)dz = \int_0^1 g(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt$ $\qquad g(z) = |z|^2$

$= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.

- AB est un segment paramétré par $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$
  $\gamma_2(t) = 1 + it$.

$$\int_{AB} g(z)dz = \int_0^1 |1+it|^2 i\,dt = \int_0^1 (1+t^2)\,dt$$

$$= i\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}i$$

- BC est un segment paramétré par : $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}$

$\gamma_3(t) = (1-t)z_B + t z_C$.

$= (1-t)(1+i) + it$

$= -t + 1 + i$

$$\Rightarrow \int_{BC} g(z)dz = \int_0^1 -|1-t+i|^2\,dt = -\int_0^1 (1-t)^2 + 1\,dt$$

$$= -\left[2t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{3}.$$

Scanned with CamScanner

• C_0 est paramétré par: $\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{C}$

$$\gamma_4(t) = (1-t)i$$

$$\int_{C_0} g(z)\,dz = \int_0^1 g(\gamma_4(t))\,\gamma_4'(t)\,dt$$

$$= -i \int_0^1 |(1-t)i|^2\,dt$$

$$= -i \int_0^1 (1-t)^2\,dt = -\frac{i}{3}.$$

Conclusion

$$\int_\Gamma g(z)\,dz = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i - \frac{4}{3} - \frac{i}{3} = -1 + i$$

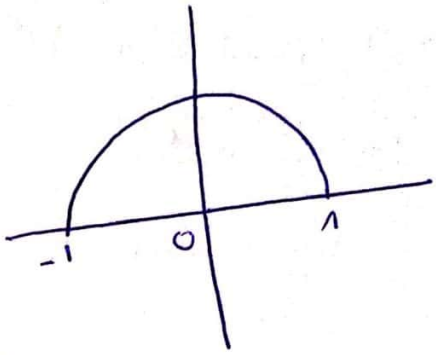
Scanned with CamScanner

Exercice 13

$f(z) = \sin(nz)$ $\quad n \in \mathbb{Z}$.

$\gamma : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = e^{2i\pi t}$



$\gamma \to$ Le demi-cercle de centre 0 et de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique

- $\int_\gamma f(z)dz$ par la méthode de Cauchy.

on considère Γ le chemin fermé simple formé des segments $[-1,1]$ et le demi cercle de centre 0 et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique.

$\Gamma = [-1,1] * \gamma$.

on a. f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ ← ouvert simplement connexe

Donc d'après le théorème de cauchy

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{[-1,1]} f(z)\,dz + \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{-1}^{1} f(z)\,dz = -\int_{-1}^{1} \sin(nz)\,dz$$

$$\Rightarrow = +\left[\frac{\cos(nz)}{n}\right]_{-1}^{1}$$

- Si $n \neq 0$

$$= \frac{1}{n}\left(\cos(n) - \cos(-n)\right) = 0$$

- Si $n = 0$ $\cdot \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Scanned with CamScanner

Méthode 2

f est continue sur $\mathbb{C}$.

- si $n \neq 0$ $F(z) = -\frac{\cos(nz)}{n}$ est une primitive de f

donc $\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(0)) - F(\gamma(1/2))$

$= F(1) - F(-1)$

$= -\frac{1}{n}\left(\cos(n) - \cos(-n)\right) = 0$

si $n = 0$ $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Scanned with CamScanner

Exercice 14

$P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) P est harmonique sur $\mathbb{R}^2$

- P est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - 2 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y - 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta P(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ P est bien harmonique sur $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ P est harmonique donc $\exists Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tque : $f = P + iQ$ est holomorphe sur $\mathbb{R}^2$

2) P est ~~harmonique~~ holomorphe sur $\mathbb{R}^2$

- f holomorphe $\Rightarrow$ P et Q satisfont les C.C.R

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x + 3 & (1) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - 2 & (2) \end{cases}$$

En intégrant (1) on obtient : $Q(x,y) = 2xy + x^2 - 3x + C(y)$ suivant x

$(2) \Rightarrow 2x - 2y - 2 = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 2x + C'(y)$

$\Rightarrow C'(y) = -2y - 2$

$\Rightarrow C = -y^2 - 2y + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $C = -y^2 - 2y + \alpha$ / $\alpha \in \mathbb{R}$

Donc $Q(x,y) = x^2 + 2xy - 3x - y^2 - 2y + \alpha$

et $\boxed{f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)}$

Scanned with CamScanner

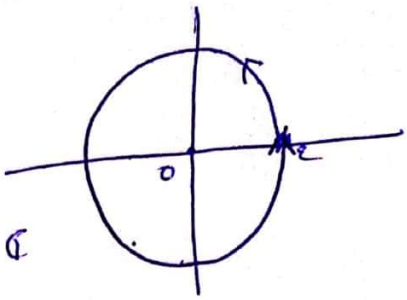
3) f est holomorphe sur $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \forall z = x+iy \in \mathbb{C}$: $f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

$\Rightarrow f'(z) = (2x-2y-2) + i(2x+2y-3)$

4) . Calcul de $\int_\gamma f(z)\,dz$

γ : le cercle de centre 0 et de rayon $R=2$



f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ (← ouvert simple connexe)

γ est un chemin fermé simple inclus dans $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

. Calcul de $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz$

. f est holomorphe sur $\mathbb{C}$

. γ : chemin fermé simple qui entoure $z_0 = 1$

Donc, d'après la formule de Cauchy,

$$f(1) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz = 2i\pi f(1)$$

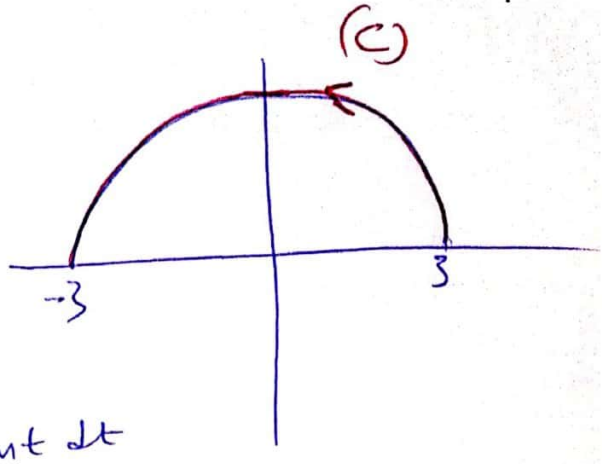
$$= 2i\pi\,(-1 + i(2-2)) \quad (\text{d'où})$$

Scanned with CamScanner

Exercice 10

Le demi-cercle (C) est paramétré par $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = 3e^{it}$$



- $\int_C \mathrm{Re}(z)\,dz = \int_0^\pi \mathrm{Re}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

$= \int_0^\pi 3\cos(t)\, 3ie^{it}\,dt$

$= \int_0^\pi 9i\cos^2 t\,dt + i\int_0^\pi 9i\cos(t)\sin t\,dt$

$= 9i\int_0^\pi \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt - \int_0^\pi 9\cos t \sin t\,dt$

$= \frac{9i}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^\pi - 9\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^\pi$

$= \frac{9i\pi}{2}$.

- $\int_C e^z\,dz = \int_0^\pi e^{3e^{it}}\, 3ie^{it}\,dt$ $\quad\left((e^{3it})' = 3ie^{3it}\right)$

$= \int_0^\pi \left(e^{3e^{it}}\right)'\,dt$

$= \left[e^{3e^{it}}\right]_0^\pi = e^{-3} - e^{3}$

- Comparaison $\int_{-3}^{3} e^z\,dz = \left[e^z\right]_{-3}^{3} = e^3 - e^{-3}$. $\left(= -\int_\gamma e^z\,dz\right)$

Remarque Si on considère le circuit fermé, formé $\Gamma = [-3,3] * (\gamma)$. = le segment $[-3,3]$ et le demi cercle (C)

Puisque $z \to e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$

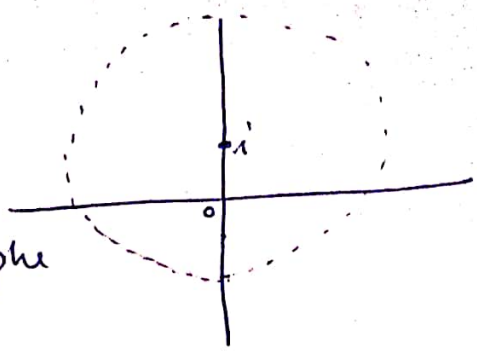
D'après le th de Cauchy $\int_{[-3,3]*C} e^z\,dz = 0$

$$\Rightarrow \int_{[-3,3]} e^z\,dz + \int_C e^z\,dz = 0 \Rightarrow \int_C e^z\,dz = -\int_{[-3,3]} e^z\,dz.$$

Scanned with CamScanner

Exercice 18

1) $\int_C \frac{\cos z}{z-i}\, dz$



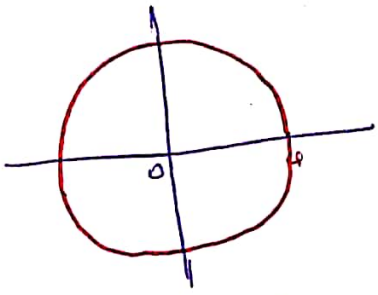
La fonction $z \mapsto \cos(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$D(i,3) \subset \mathbb{C}$.

Donc, d'après la formule de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-i}\, dz = f(i)$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{\cos(z)}{z-i}\, dz = 2i\pi f(i) = 2i\pi \cos(i)$$



2) $\int_C \frac{\sin(z)}{z^2-i^2}\, dz$

$$\frac{\sin(z)}{z^2-i^2} = \frac{\sin(z)}{(z-i)(z+i)}.$$

(décomposition en élts simples)

Comme $\frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{a}{z+i} + \frac{b}{z-i}$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2i}$ et $a = \frac{-1}{2i}$.

Donc $\frac{\sin(z)}{z^2-i^2} = \frac{1}{2i}\left(-\frac{\sin(z)}{z+i} + \frac{\sin(z)}{z-i}\right)$

La fonction $z \mapsto \sin(z)$ est holomorphe sur $D(0,5)$ (← par exple)

et $D(0,4) \subset D(0,5)$ et $D(0,4)$ contient i et $-i$

Donc, d'après la formule de Cauchy :

$$f(i) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-i}\, dz$$

$$f(-i) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z+i}\, dz$$

Scanned with CamScanner

Donc:

$$\int_C \frac{\sin(z)}{z^2-i^2}\,dz = \frac{1}{2i}\left(\int_C \frac{f(z)}{z-i}\,dz - \int_C \frac{f(z)}{z+i}\,dz\right)$$

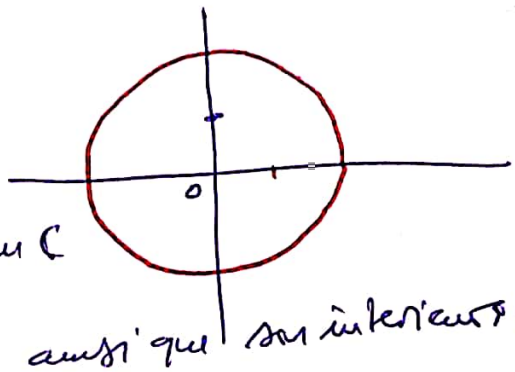
$$= \frac{1}{2i}\left(2i\pi f(i) - 2i\pi f(-i)\right)$$

$$= \pi\left(\sin(i) - \sin(-i)\right)$$

$$= 2\pi \sin(i)$$

$$= -2\pi \sinh(1)$$

3) $\int_C \frac{e^z}{z^2}\,dz$



la fonction $z \mapsto e^z$ est holomorphe sur C

C est un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans C

(On peut prendre $\Omega = D(0,3)$ par exple)

aussi

Donc d'après La formule de calcul des dérivées.

$$\left(f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du.\right)$$

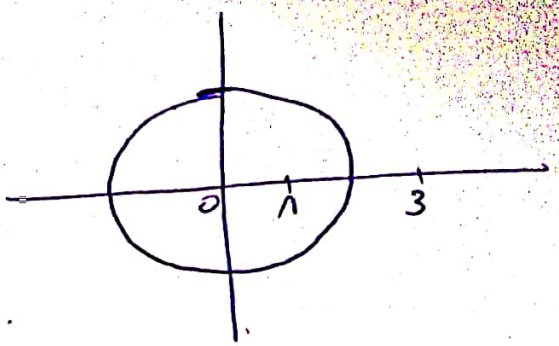
$$f'(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-0)^2}\,dz.$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2i\pi f'(0) \quad \text{et } f'(z) = e^z$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2i\pi}$$

Scanned with CamScanner

- $\int_C \frac{1}{(z-1)^3(z-3)}\,dz$



On considère la fonction $f: z \to \frac{1}{z-3}$.

f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{3\}$

en particulier f est holomorphe sur $D(0,2,5) = \Omega$

on a: $C(0,2)$ est un chemin fermé inclus dans Ω

ainsi que son intérieur et entoure $z_0 = 1$

Donc, d'après La formule de cauchy

$$f''(1) = \frac{2!}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^3}\,dz$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{1}{(z-1)^3(z-3)}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2i\pi}{2} f''(1)$$

$$f(z) = \frac{1}{z-3} \Rightarrow f'(z) = \frac{-1}{(z-3)^2}$$

$$\Rightarrow f''(z) = \frac{2(z-3)}{(z-3)^4} = \frac{2}{(z-3)^3} \cdot \Rightarrow f''(1) = -$$

Conclusion : $\int_C \frac{1}{(z-1)^3(z-3)}\,dz = \boxed{\frac{-i\pi}{4}}$

Scanned with CamScanner